

Problemas sobre subconjuntos difusos y operadores básicos en subconjuntos difusos

Lógica Difusa

Julio Weissman Vilanova

1. Subconjuntos difusos

1. De acuerdo a su experiencia, enumere al menos 4 situaciones en las cuales el uso de conceptos difusos sea útil y justifique porqué en cada uno de ellos.
2. Definir los subconjuntos difusos para: a) *rico*, b) *sucia*, c) *sabroso*. Recuerda de especificar bien el conjunto universo.
3. Sea $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y A y B dos subconjuntos difusos de U dados por:

$$A = \frac{0}{0} + \frac{1}{0} + \frac{0,1}{2} + \frac{0,2}{3} + \frac{0,3}{4} + \frac{0,8}{5} + \frac{0,9}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9},$$
$$B = \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0,9}{2} + \frac{0,8}{3} + \frac{0,7}{4} + \frac{0,5}{5} + \frac{0,4}{6} + \frac{0,2}{7} + \frac{0,2}{8} + \frac{0}{9}.$$

- a) Determine que significado podrían tener cada uno de los subconjuntos difusos.
 - b) Encuentre el núcleo $[A]_1$ y $[B]_1$ de cada uno de los subconjuntos difusos anteriores.
 - c) Encuentre el soporte $[A]_{0^+}$ y $[B]_{0^+}$ de los subconjuntos anteriores.
4. Sean A y B dos subconjuntos difusos de un conjunto universo U . El *grado de subconjuntividad* de A en B se define como

$$s(A|B) = \frac{\|A \wedge B\|}{\|A\|},$$

donde $\|\cdot\|$ es la cardinalidad de un subconjunto difuso y $A \wedge B$ es un subconjunto difuso definido como $A \wedge B(x) = \min(A(x), B(x))$ para todo $x \in U$.

- a) Demostrar que $s(A|B) = 1$ si y solo si $A(x) \leq B(x)$ para todo x en U .
 - b) Calcular el *grado de subconjuntividad* de A en B para A y B del problema anterior.
 - c) Calcular el *grado de subconjuntividad* de B en A para A y B del problema anterior.
 - d) ¿Que se puede concluir respecto A y B de acuerdo a lo obtenido en los incisos anteriores?
5. Un *modificador lingüístico* es una función definida de $[0, 1]$ a $[0, 1]$ que sirve para generar un conjunto difuso a partir de la definición lingüística de otro conjunto difuso.

Por ejemplo, el modificador lingüístico *muy* permite modificar un conjunto difuso $A : U \rightarrow [0, 1]$ a otro mA tal que lingüísticamente signifique *muy A*. Esto es, si $A(x) = 1$, por lo tanto $mA(x) = 1$ al haber seguridad total que x pertenece a A ; igualmente, si $A(x) = 0$, entonces $mA(x) = 0$. Para los casos donde x cumple con el concepto A en grado $y \in (0, 1)$, se puede concluir que entonces deber cumplir el concepto *muy A* en un grado menor, dado que el modificador *muy* se puede asumir como una asignación más estricta de grado de pertenencia. Una forma común sería el de establecer $mA(x) = (A(x))^2$ para todo $x \in [0, 1]$. Los modificadores lingüísticos más comunes son los siguientes:

$$\begin{aligned}
mA(x) &= (A(x))^2 && \text{«muy A»}, \\
\pm A(x) &= (A(x))^{1/2} && \text{«más o menos A»}, \\
ant A(x) &= A(m-x) && \text{«Antónimo de A»}.
\end{aligned}$$

En particular los antónimos permiten definir conceptos a partir de sus opuestos, por ejemplo el concepto *viejo* a partir de la definición de *joven*. A partir de la noción de *modificadores lingüísticos*:

- Defina el subconjunto difuso *Joven*, donde $U = [0, 120]$ es la edad en años de un individuo. Utilice para esto una función de pertenencia tipo L . Grafique el subconjunto difuso a mano.
- Defina *muy Joven*, *más o menos Joven* y *Viejo* utilizando modificadores lingüísticos. Grafíquelos a mano y comente las diferencias.
- Explique la diferencia entre *no Joven* y *Viejo* y la forma en que debería ser calculada la constante m del modificador lingüístico.
- Proponga la manera de implementar los modificadores lingüísticos *algo* y *completamente*.
- Aplique los modificadores lingüísticos *algo* y *completamente* al subconjunto difuso *Joven* y grafíquelos con los anteriores.
- ¿Es que es posible aplicar un modificador lingüístico sobre otro? Esto es $mmJoven$ significaría *muy, muy Joven*. Grafique $mmJoven$ con los anteriores.
- ¿Qué significaría decir *más o menos muy Joven*?

2. T-normas, t-conormas y complementos

- Demostrar que, si Δ_1, Δ_2 son t-normas y ∇_1, ∇_2 son t-conormas, entonces:

$$\begin{aligned}
x\Delta_1(y\nabla_1z) &= (x\Delta_1y)\nabla_1(x\Delta_1z) && \text{ssi } \nabla_1 = \text{máx}, \\
x\Delta_1(y\Delta_2z) &= (x\Delta_1y)\Delta_2(x\Delta_1z) && \text{ssi } \Delta_2 = \text{mín}, \\
x\nabla_1(y\Delta_1z) &= (x\nabla_1y)\Delta_1(x\nabla_1z) && \text{ssi } \Delta_1 = \text{mín}, \\
x\nabla_1(y\nabla_2z) &= (x\nabla_1y)\nabla_2(x\nabla_1z) && \text{ssi } \nabla_2 = \text{máx}.
\end{aligned}$$

- Si para una t-norma continua $x\Delta x = 0$ si $0 \leq x \leq 1/2$, ¿Como puede ser dicha t-norma? ¿Que características tiene? ¿Es arquimediana? ¿Es estricta?
- Obtener la t-norma y la t-conorma en relación a la operación de complemento $c(x) = 1 - x$ que se obtienen a partir de los generadores multiplicativos siguientes:

$$\begin{aligned}
f_\lambda(x) &= \frac{(1+\lambda)x}{1+\lambda x} \\
f_\beta(x) &= \frac{x^\beta + 1}{2}
\end{aligned}$$

- Verifique si las siguientes propiedades (absorción y distributividad) se cumplen para las t-normas $\Delta_M, \Delta_P, \Delta_W, \Delta_0$:

$$\begin{aligned}
x\Delta(x\nabla y) &= x \\
x\nabla(x\Delta y) &= x \\
x\nabla(y\Delta z) &= (x\nabla y)\Delta(x\nabla z) \\
x\Delta(y\nabla z) &= (x\Delta y)\nabla(x\Delta z)
\end{aligned}$$

5. Utilice los subconjuntos difusos Joven y Viejo definidos anteriormente. Grafiquelos de nuevo a mano.

a) Grafique, utilizando las 3 tripletas de De Morgan, $\langle \Delta_M, \nabla_M, 1 - x \rangle$, $\langle \Delta_P, \nabla_P, 1 - x \rangle$ y $\langle \Delta_W, \nabla_W, 1 - x \rangle$ los siguientes conceptos difusos:

- 1) «No joven y no viejo» (esto es, de edad madura como el profesor de la materia).
- 2) «joven o viejo»
- 3) «joven o no joven»
- 4) «viejo y no viejo»

utilice colores diferentes para cada tripleta con el fin de visualizar claramente las diferencias.

b) ¿Es lo mismo ser *Joven* que *Joven* y *joven*? ¿Y *viejo* que *viejo* o *viejo*? ¿Que significado tendría en las diferentes tripletas la afirmación «Henrucho es una persona *Joven* y es una persona *Joven* y es una persona *Joven*»? Justifique sus respuestas con gráficas hechas a mano.