Problemas sobre lógica difusa

Lógica Difusa

Julio Waissman Vilanova

1. Lógica clásica y lógica difusa

1. Sea el álgebra de Boole $(\{0,1\}, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, con $\wedge$, $\vee$ y $\neg$ la conjunción, disyunción y negación clásicas dadas por las tablas de verdad. Demuestre que **existe** un conjunto U y una función **uno a uno y sobre** $T : \{0,1\} \to \mathscr{P}(U)$, donde $\mathscr{P}(U)$ es el conjunto potencia de U, tal que:

$$\begin{aligned} T(x \vee y) &= T(x) \cup T(y), \\ T(x \wedge y) &= T(x) \cap T(y), \\ T(\neg x) &= T(x)^c. \end{aligned}$$

2. Consideremos un conjunto de 3 proposiciones atómicas y un sistema de lógica proposicional 5-valuada. ¿Cuantas clases de equivalencias diferentes podríamos tener con este sistema? ¿Es que todas las clases de equivalencia son posibles de generar utilizando las proposiciones atómicas originales y los operadores de disyunción, conjunción y negación (todos los operadores 5–valuados, por supuesto)? Justifique su respuesta con un ejemplo.

2. Conectivos lógicos difusos (otros a $\triangle$, $\triangledown$ y $\neg$)

1. Sea $\triangle$, $\triangledown$ y n una t–norma, t–conorma y negación estricta respectivamente, muestre si

$$x \Rightarrow y = (x \triangle y) \triangledown n(x)$$

es una implicación difusa.

2. Sea $\Rightarrow$ una implicación difusa válida. Demuestre que

$$x \Rightarrow^* y = ((1-x) \Rightarrow (1-y))$$

también es una implicación difusa.

3. Un operador de consenso $\dotplus$ se define como una operación binaria $\dotplus : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ tal que, para todo $x, y, w, z \in [0,1]$

$$\begin{aligned} x \dotplus x &= x \\ x \dotplus y &= y \dotplus x, \\ x \dotplus y &< x \dotplus z \quad \text{si } y < z, \\ (x \dotplus y) \dotplus (z \dotplus w) &= (x \dotplus z) \dotplus (y \dotplus w). \end{aligned}$$

Demuestre que para cualquier t–norma $\triangle$ y t–conorma $\triangledown$, $\forall x, y \in [0,1]$:

$$x \triangle y \le x \dotplus y \le x \triangledown y.$$

4. Demuestre que para cualquier función $f : [0,1] \to [0,1]$ estrictamente creciente, biyectiva, con $f(1) = 1$ y $f(0) = 0$, entonces

$$x \dotplus y = f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right),$$

donde f se conoce como *generador* de un operador de consenso.

5. Encuentre el operador de consenso cuyo generador es

$$f(x) = \frac{1}{1+a\left(\frac{1-x}{x}\right)^p}.$$

6. Sea n una negación estricta y $\dotplus$ un operador de consenso y sean los operadores difusos

$$x \diamond y = n(x \dotplus y),$$
$$x \star y = n\big(n(x) \dotplus n(y)\big).$$

Muestre las propiedades de estos operadores. ¿Que significado lingüístico podrian tener dichos operadores? Justifique sus respuestas.

3. Razonamiento aproximado

1. Sean $A : U \to [0,1]$ y $B : V \to [0,1]$ conjuntos difusos. El *Modus Ponens Generalizado* es la regla por la cual se busca estimar $B(y)$ a partir de

$$R(A)(y) = \sup_{x\in U}\Big(R(x,y) \triangle A(x)\Big),$$

donde $R(x,y) = A(x) \Rightarrow B(y)$, donde $\Rightarrow: [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ es un operador de implicación difuso.

La idea del razonamiento aproximado es que, si se tiene conocimiento de una regla muy clara $A(x) \Rightarrow B(y)$ (por ejemplo, «si el agua está caliente, entonces abro poco la llave de agua fría»), aunque no tengamos muy claro el conjunto difuso A, pero podamos establecer un conjunto difuso $A^* : U \to [0,1]$ el cual *se aproxime* al concepto A, es posible obtener un conjunto difuso B^* que aproxime a B utilizando

$$R(A^*)(y) = B^*(y) = \sup_{x\in U}\Big(R(x,y) \triangle A^*(x)\Big).$$

El problema es saber si el *modus ponens* generalizado para razonamiento aproximado es posible realizarlo con cualquier combinación de t–norma e implicación difusa. Esto es, si $A^* = A$, entonces $B^* = B$.

Demuestre que para la t–norma $x \triangle y = \text{mín}(x,y)$ y para la implicación difusa $x \Rightarrow y = \text{máx}(\text{mín}(x,y), 1-y)$ entonces $R(A)(y) \neq B(y)$, lo que significaría que no todas las combinaciones de t–normas e implicaciones difusas podrían utilizarse en razonamiento aproximado. Encuentre al menos dos pares de t–norma e implicación difusa con los cuales sea válido realizar razonamiento aproximado.

2. De la misma forma en que se generalizó el *Modus Ponens* ($((x \Rightarrow y) \wedge x) \Rightarrow y$) para razonamiento aproximado realice la extensión a razonamiento aproximado del *Modus Tollens* ($((x \Rightarrow y) \wedge \neg y) \Rightarrow \neg x$)