

מבני נתונים

תרגיל 1

סיבוכיות זמן ריצה

1. עבור כל אחת מהבעיות, כתבו תוכנית קטנה שפותרת אותה ונתחו את זמן הריצה במקרה הגרוע של התוכנית. חשבו זאת קודם ע"י ספירה מדויקת של מספר הפעולות ואז פשטו את הביטוי שקיבלתם וכיתבו אותו במונחים של $\Theta(\cdot)$. נסו לתת תוכנית יעילה ככל האפשר. בנוסף הסבירו מה n מייצג.

(א) מציאת מקסימום במערך לא ממוין.

(ב) חישוב ממוצע ערכים במערך.

(ג) מציאת מקסימום במערך ממוין.

2. בכל סעיף נתונות שתי פונקציות f, g . בכל אחד אמרו האם $f = O(g)$, $f = \Omega(g)$ או $f = \Theta(g)$. השתמשו בלמה העיקרית שלמדנו בכיתה.

$$(א) \quad g(n) = n \cdot \log(n) + n, f(n) = n$$

$$(ב) \quad g(n) = 4n^3 + 8, f(n) = n^3 + n + 1$$

$$(ג) \quad g(n) = 3^n, f(n) = 2^n$$

(ד) מנקודה זו והלאה יש צורך בכלל לופיטל, לכן בסעיפים אלה רק כתבו מה אתם חושבים שהתשובה, אין צורך בהוכחה מדויקת. בפתרונות אכתוב את ההוכחה המלאה ולפני הבחינה עברו שוב על שאלות אלה וראו שאתם יודעים לפתור גם אותן.

$$g(n) = \log^2(n), f(n) = \sqrt{n}$$

$$(ה) \quad g(n) = n \log(n) + n^2, f(n) = n \log(n)$$

$$(ו) \quad g(n) = n, f(n) = n + \log^2(n)$$

$$(ז) \quad g(n) = n^2, f(n) = 2^n$$

3. כתבו אלגוריתם המקבל מערך (לאו דוקא ממוין) ומחזיר את המספר שמופיע בו הכי הרבה פעמים. למשל על הקלט:

1, 4, 3, 6, 5, 3, 3, 2, 4, 6, 3, 5

הוא יחזיר את המספר 3. האלגוריתם שלכם צריך לרוץ בזמן $O(n \log(n))$. אל תשכחו לנתח את זמן הריצה שלו.

4. נתון מערך ממוין, מלבד מספר אחד בו, שנמצא במקום הלא נכון. כתבו אלגוריתם הרץ בזמן $O(n)$ הממין מערך כזה שהוא מקבל כקלט. שוב, נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם שלכם.

5. שנו את האלגוריתם שלמדנו בתרגול למיון בועות, כך שזמן הריצה שלו במקרה הכי טוב הוא $O(n)$. הנה האלגוריתם שלמדנו:

```
void swap(int[] a, int i, int j)
{
    int temp = a[i];
    a[i] = a[j];
    a[j] = temp;
}
void bubbleSort(int[] a) {
    int temp;
    for (int i = 1 ; i < arr.length ; i++)
        for (int j = 0; j < arr.length-i; j++)
            if(a[j] > a[j+1])
                swap(a, j, j+1);
}
```

6. נתון הקוד הבא:

```
boolean check(int[] a, int[] b)
{
    for (int i = 0; i < a.length; i++)
        for (int j = 0; j < b.length; j++)
            if (a[i] < b[j])
                return false;
    return true;
}
```

(א) מה עושה השיטה?

(ב) מה סיבוכיות זמן הריצה שלה? הניחו שגדלי המערכים שווים שניהם ל n .

(ג) כתבו שיטה שמבצעת את אותה פעולה אך בסיבוכיות זמן טובה יותר. נתחו את סיבוכיות הזמן החדשה.

פתרון משוואות רקורסיביות

1. פתרו כל אחת מנוסחאות הנסיגה הבאות בעזרת שיטת האב, או הסבירו מדוע משפט האב לא מתאים לדוגמא. נמקו היטב את השימוש במשפט האב ובדקו את כל התנאים.

$$T(n) = 4T(n/2) + n \quad (\text{א})$$

$$T(n) = 2T(n/3) + n^2 \quad (\text{ב})$$

$$T(n) = 9T(n/3) + n^2 \quad (\text{ג})$$

$$T(n) = \frac{1}{2}T\left(\frac{1}{2}n\right) + \frac{1}{n} \quad (\text{ד})$$

$$T(n) = T\left(\frac{1}{2}n\right) + \log n \quad (\text{ה})$$

2. פתרו את נוסחאות הרקורסיה הבאות בעזרת שיטת ההצבה:

(א)

$$T(n) = 2T(n-1)$$

$$T(1) = 5$$

(ב)

$$T(n) = T(n-2) + 4$$

$$T(1) = 3$$

$$T(0) = 0$$

(ג)

$$T(n) = 3T\left(\frac{1}{2}n\right) + 1$$

$$T(1) = 2$$

(ד)

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + c$$

$$T(1) = d$$

כאשר a, b, c, d הם קבועים גדולים מ-0. כמו כן, $b > 1, a > 1$. אחרי שאתם מקבלים את התוצאה המדויקת, כיתבו אותה ב- Θ , והשוו אותה למה שהייתם מקבלים אילו הייתם משתמשים במשפט האב.

3. שאלה זו היא לתרגול נוסף של משפט האב. אין צורך להגיש אותה.

פתרו כל אחת מנוסחאות הנסיגה הבאות בעזרת שיטת האב, או הסבירו מדוע משפט האב לא מתאים לדוגמא. נמקו היטב את השימוש במשפט האב ובדקו את כל התנאים.

$$T(n) = 6T(n/2) + n^2 \quad (\text{א})$$

$$T(n) = T(n/3) + n^2 \quad (\mathfrak{b})$$

$$T(n) = 2T(\tfrac{1}{2}n) + \tfrac{n}{\log n} \quad (\mathfrak{a})$$