

KÜMELER VE MANTIK

KESİLİ MATEMATİKSEL YAPILAR

2012-13

Kümeler

- $\mathbb{Z}$ (Zahlen; alm.) tamsayılar kümesi
- $\mathbb{Z}^-$ negatif tamsayılar kümesi,
- $\mathbb{Z}^{nonneg} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\overline{\mathbb{Z}^-} = \mathbb{Z}^{nonneg}$
- $\mathbb{Q}$ (quotient; en.) rasyonel sayılar kümesi.
- X bir sonlu küme ise,
 $|X| = \text{'X'deki öğelerin sayısını'}$

Ayrık Kümeler

- **Tanım 1.1.1:** X ve Y herhangi iki küme olsunlar. Eğer $X \cap Y = \emptyset$ ise, X ve Y kümelerine *ayrıktırlar* denir.
- Kümelerden oluşan bir S kümesinden alınan herhangi iki küme aralarında ayrıksa, S kümesine *ayrık küme* denir

De-Morgan Kuralı

- **Teorem 1.1.2:** (Kümeler İçin De-Morgan Kuralı)

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Önermeler

- **Tanım 1.2.1:** Doğru ya da yanlış bir hüküm bildiren ifadeye bir *önerme* (proposition) denir.

Önermeler Arasındaki İşlemler

- **Tanım 1.2.3:** p ve q birer önerme olsunlar. p ve q önermelerinin $p \wedge q$ ile gösterilen *birleşmesi* (conjunction)
“ p ve q ”
ile verilen önermedir.
- p ve q önermelerinin $p \vee q$ ile verilen *ayırıklamı* (disjunction)
“ p ya da q ”
ile verilen önermedir.

Doğruluk Tablosu

- **Tanım 1.2.4:** $p \wedge q$ önermesinin doğruluk değerleri

p	q	$p \wedge q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

doğruluk tablosu ile verilir.

Doğruluk Tablosu

- **Tanım 1.2.4:** $p \vee q$ önermesinin doğruluk değerleri

p	q	$p \vee q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

doğruluk tablosu ile verilir.

Doğruluk Tablosu

- **Tanım 1.2.6:** Bir p önermesinin p' ile gösterilen **olumsuzlaması** (negation) “**olumsuz p** ” ile verilen önermedir. p' önermesinin doğruluk değerleri

p	p'
D	Y
Y	D

doğruluk tablosu ile verilir.

Koşullu Önerme

- **Tanım 1.3.1:** p ve q iki önerme olsun.

“eğer p ise, q ”

ifadesine bir *koşullu önerme* denir ve bu kısaca $p \rightarrow q$ ile gösterilir.

- Burada p önermesine *hipotez* ve q önermesine *sonuç önerme* denir.

Doğruluk Tablosu

- **Tanım 1.3.2:** $p \rightarrow q$ önermesinin doğruluk değerleri

p	q	$p \rightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

doğruluk tablosu ile verilir.

Çift Koşullu Önerme

- **Tanım 1.3.5:** p ve q iki önerme olsunlar

“ p gerek ve yeter koşul q ”

koşullu önermesine *çift koşullu önerme* denir ve $p \leftrightarrow q$ ile gösterilir.

Doğruluk Tablosu

- **Tanım 1.3.2:** $p \leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk değerleri

p	q	$p \leftrightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

doğruluk tablosu ile verilir.

Mantıksal Denklik

- **Tanım 1.3.6:** $p_1, p_2, \dots, p_n$ önermelerinin bileşkesinden oluşan herhangi iki bileşke önerme P ve Q olsunlar.

$p_1, p_2, \dots, p_n$ 'lerin herhangi doğruluk değerleri verildiğinde ya P ve Q önermelerinden her ikisi birden doğru ya da P ve Q önermelerinden her ikisi birden yanlış ise, P ve Q önermelerine ***mantıksal denktir*** denir ve bu

$$P \equiv Q$$

ile gösterilir.

Devrik Önerme

- **Tanım 1.3.9:** $p \rightarrow q$ koşullu önermesine tam mantıksal denk olan koşullu önermeye *devrik önerme* denir ve bu

$$\overline{q} \rightarrow \overline{p}$$

ile verilir.

Sonuç Çıkarımı

- **Tanım 1.4.1:** Önermelerin bir dizisinden bir sonuca varma sürecine *tümdengelimli sonuç çıkarma* (deductive reasoning) denir.
- Verilen önermelere *hipotezler* denir.
- Bir *sonuç çıkarma argümanı*, bir sonuç ile hipotezlerden oluşur.

Geçerli Argüman

- **Tanım 1.4.2:** Bir *argüman*

$$p_1, p_2, \dots, p_n / \therefore q$$

şeklinde yazılan önermelerin bir dizisidir. Burada $p_1, p_2, \dots, p_n$ 'lere hipotezler ve q 'ya da bir *sonuç* denir.

- Eğer $p_1, p_2, \dots, p_n$ 'lerin hepsi doğru olduğunda q önermesi de doğru ise *argüman geçerlidir*. Aksi halde *argüman geçersizdir*.

Koygu Kuralı

● Tanım 1.4.3:

$$\frac{p \rightarrow q \quad p}{\therefore q}$$

argümanı geçerli bir argümandı. Bu tür bir sonuç çıkarma kuralına *ayrılabilme kuralı* (law of detachment) ya da *koygu kuralı* (modus ponens) denir

Sonuç Çıkarım Kuralları

Sonuç Çıkarım Kuralları		
Hangisinden	Türetilebilir	Kural Adı
$P, P \rightarrow Q$	Q	Modus ponens - mp
$P \rightarrow Q, Q/$	$P/$	Modus tollens - mt
P, Q	$P \wedge Q$	Birleşim
$P \wedge Q$	P, Q	Basitleştirme
P	$P \vee Q$	Toplama

Önerme Fonksiyonu

- **Tanım 1.4.1:** D bir küme ve $x \in D$ değişkenine bağlı bir ifade $P(x)$ olsun. Eğer herbir x için $P(x)$ bir önermeyse, P 'ye bir *önerme fonksiyonu* denir.

Evrensel Niceleyici Deyim

- **Tanım 1.4.2:** Bir D tanım kümesiyle önerme fonksiyonu P olsun.
her x için $P(x)$
deyimine *evrensel niceleyici deyim* denir.
- Bu deyim
 $\forall x P(x)$
şeklinde de yazılabilir.
- Eğer her $x \in D$ için $P(x)$ doğru ise, $\forall x P(x)$ doğrudur

Karşıt Örnek

- **Tanım 1.4.3:** D tanım kümesinden alınan en az bir x için $P(x)$ yanlış ise, buna “her x için $P(x)$ ” ifadesinin bir *karşıt örneği* (counterexample) denir.
- D kümesinden alınan en az bir x için $P(x)$ doğru bir önerme ise, bu durumda “D kümesinden alınan bazı x ‘ler için $P(x)$ ” ifadesi doğrudur.

Varlıksal Niceleyici Deyim

- **Tanım 1.4.4:** D tanım kümesiyle bir önerme fonksiyonu P olsun.

bir x için $P(x)$

deyimine *varlıksal niceleyici deyim* denir.

- Bu deyim kısaca

$\exists x P(x)$

şeklinde de yazılabilir

Varlıksal Niceleyici Deyim

- **Örnek 1.4.5:** Bazı x gerçel sayıları için

$$\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{2}{5}$$

ifadesi doğrudur, çünkü $x=2$ için

$$\frac{2}{2^2 + 1} = \frac{2}{5}$$

olmaktadır.

Genelleştirilmiş De Morgan Kuralı

- **Teorem 1.4.6:** P bir önerme fonksiyonu olsun.

Aşağıda (a) ve (b) ile verilen her bir önerme çifti aynı doğruluk değerlerine sahiptir.

a) $(\forall xP(x))' ; \exists xP'(x)$

b) $(\exists xP(x))' ; \forall xP'(x)$

Genelleştirilmiş De Morgan Kuralı

● Örnek 1.4.7:

“Bazı kuşlar uçamaz”

$P(x)$: “ x uçabilir”

$$\exists x P^I(x)$$

De Morgan Kuralına göre:

$$(\exists x P^I(x))^I = \forall x P^{II}(x) = \forall x P(x)$$

“Her kuş uçabilirdir”

Genelleştirilmiş De Morgan Kuralı

● Örnek 1.4.8:

Bir P önerme fonksiyonunun tanım kümesi $\{-1,0,1\}$ olsun.

$$\forall xP(x) \rightarrow P(-1) \wedge P(0) \wedge P(1)$$

$$\exists xP(x) \rightarrow P(-1) \vee P(0) \vee P(1)$$

Evrensel Özelleştirme

- Kabul edelim ki, $\forall x \in D \ P(x)$ doğru olsun. Bu durumda D kümesinden alınan her x için $P(x)$ önermesi doğrudur.
- Özellikle, eğer D kümesinde bir öge d ise, bu durumda $P(d)$ önermesi de doğrudur. Böylece gördük ki,

$$\frac{\forall x \ P(x)}{\therefore \text{eğer } d \in D \ P(d)}$$

argümanı geçerlidir. Bu sonuç çıkarım kuralına *evrensel özelleştirme* denir.

Sonuç Çıkarım Kuralları

Sonuç Çıkarım Kuralları		
Nereden	Türetilebilir	Kural Adı
$(\forall x)P(x)$	t bir değişken ya da sembolik sabit olmak üzere $P(t)$	Evrensel özelleştirme -eö
$(\exists x)P(x)$	a daha önce kanıt dizisinde kullanılmamış olan bir sembolik sabit olmak üzere $P(a)$	Varlıksal özelleştirme – vö
$P(x)$	$(\forall x)P(x)$	Evrensel genelleştirme - eg
$P(x)$ ya da a bir sembolik sabit olmak üzere $P(a)$	$(\exists x)P(x)$	Varlıksal genelleştirme - vg

Sonuç Çıkarım Kuralları

● Örnek 1.5.10:

“Her x gerçel sayısı için, eğer x bir tamsayı ise bu durumda x bir rasyonel sayıdır. $\sqrt{2}$ sayısı rasyonel değildir. Bu sebeple $\sqrt{2}$ bir tamsayı değildir.”

Eğer

$P(x)$: “ x bir tamsayıdır”

$Q(x)$: “ x rasyoneldir”

alınırsa argüman şöyle olur:

$$\forall x \mathbb{R} (P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$Q'(\sqrt{2})$$

$$\hline \therefore P'(\sqrt{2})$$

Sonuç Çıkarım Kuralları

$$\forall x \mathbb{R}(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\frac{Q'(\sqrt{2})}{\dots\dots\dots}$$

$$\therefore P'(\sqrt{2})$$

evrensel özelleştirmeyeyle $P(\sqrt{2}) \rightarrow Q(\sqrt{2})$

atkı kuralı (modus tollens) ile $P'(\sqrt{2})$

argüman geçerlidir.

$P \rightarrow Q$ ve Q' ise, P'

Sonuç Çıkarım Kuralları

- **Örnek 1.5.11:** “Herkez ya elma ya da portakal sever.
Emre elma sevmez”

$P(x)$: “x elma sever”

$Q(x)$: “x portakal sever”

İlk hipotez: $\forall x P(x) \vee Q(x)$

Evrensel özelleştirme ile $P(\text{emre}) \vee Q(\text{emre})$

İkinci hipotez: $\neg P(\text{emre})$

Ayrışma kıyaslama sonuç çıkarma kuralına göre
 $Q(\text{emre})$

Yani “emre portakal sever”.

İççe Niceleyiciler

- “İki pozitif gerçel sayının toplamı pozitiftir”

Bu ifadeyi sembolik olarak yazmaya çalışalım. Eğer $x > 0$ ve $y > 0$ ise $x + y > 0$ dır. Ama burada iki pozitif gerçel sayı var olduğundan iki adet niceleyici kullanmalıyız.

$$P(x,y): (x > 0)(y > 0) \rightarrow (x + y > 0)$$

alınırsa, ifade sembolik olarak

$$\forall x \forall y P(x,y)$$

şeklinde yazılabilir.

İççe Niceleyiciler

- Çok sayıda niceleyici kullanılmasına *iççe niceleyiciler* denir.

- **Örnek 1.6.1:**

“Herkes birilerini sever”

$L(x,y)$: “x, y ‘yi sever”

$\forall x \exists y L(x,y)$