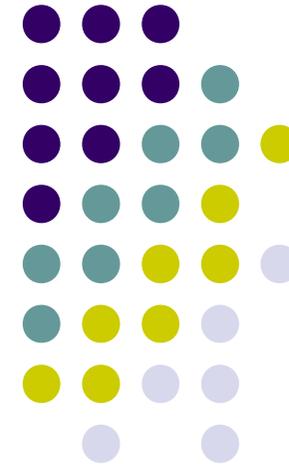


Morfologia Matematica su immagini in scala di grigio

Dilation, erosion, opening, closing

Top-Hat, Bottom-Hat

Algoritmi Morfologici in scala di grigio



Dalle immagini binarie alle immagini in scala di grigio



- Le tecniche di morfologia matematica viste finora si applicano alle immagini binarie (2 livelli) di luminosità).
- Questa è la modalità più diffusa di impiego di tali tecniche.
- In effetti, la definizione degli operatori morfologici si estende anche alle immagini a (più di 2) livelli di grigio.

Dalle immagini binarie alle immagini in scala di grigio



- Perché considerare operatori morfologici su immagini in scala di grigio ?
- Non si potrebbe passare prima per una binarizzazione dell'immagine e poi applicare gli operatori morfologici "binari" ?
- Non sempre le caratteristiche dell'immagine (livello di rumore, dinamica) rendono possibile questo passaggio.

Immagine e structuring element

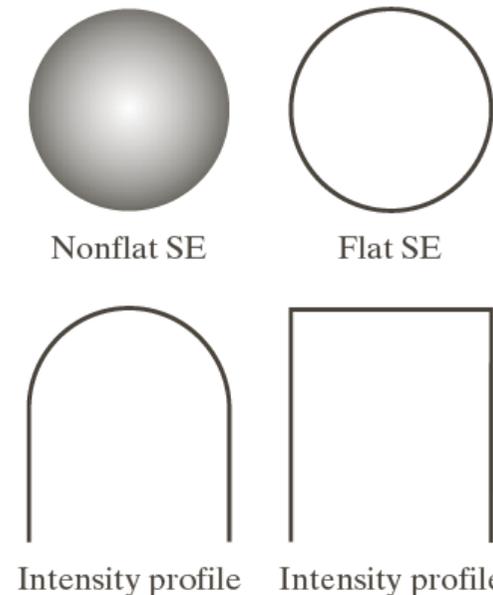


- L'immagine è formalizzata come una funzione $f(x,y)$, dove $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ e la funzione ha valori in \mathbb{Z} .
- Stessa formalizzazione per lo structuring element $b(x,y)$, anche se distingue tra due tipi di SE:
 - SE flat
 - SE non flat

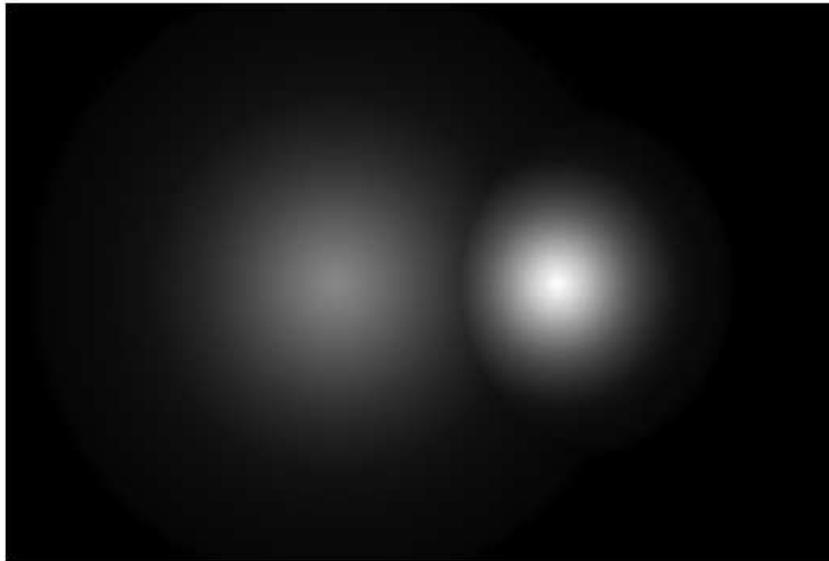
Structuring element in scala di grigio



- Per SE flat si intende uno SE la cui intensità è costante su tutto il supporto.
- I SE nonflat esibiscono una intensità non costante.
- Tipicamente si utilizzano SE flat

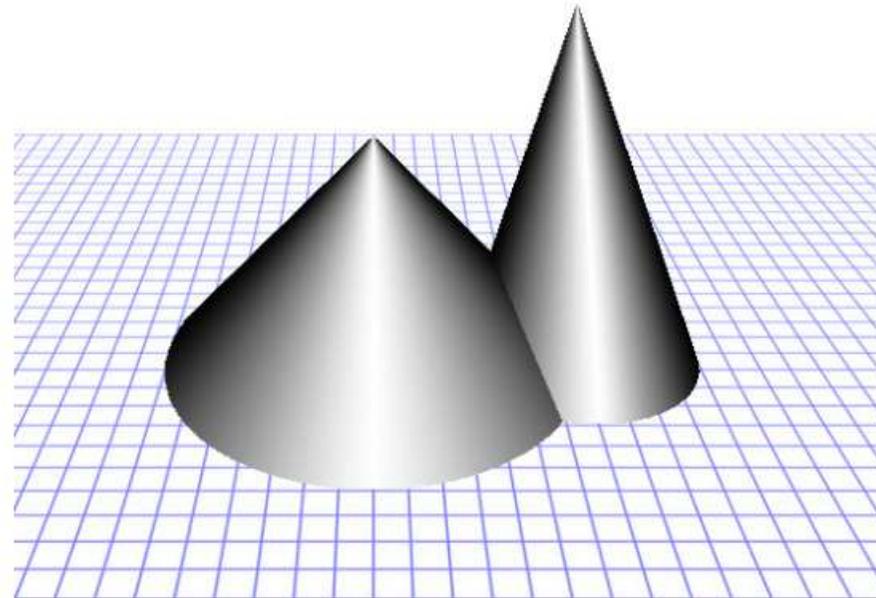


Visualizzare immagini in scala di grigio



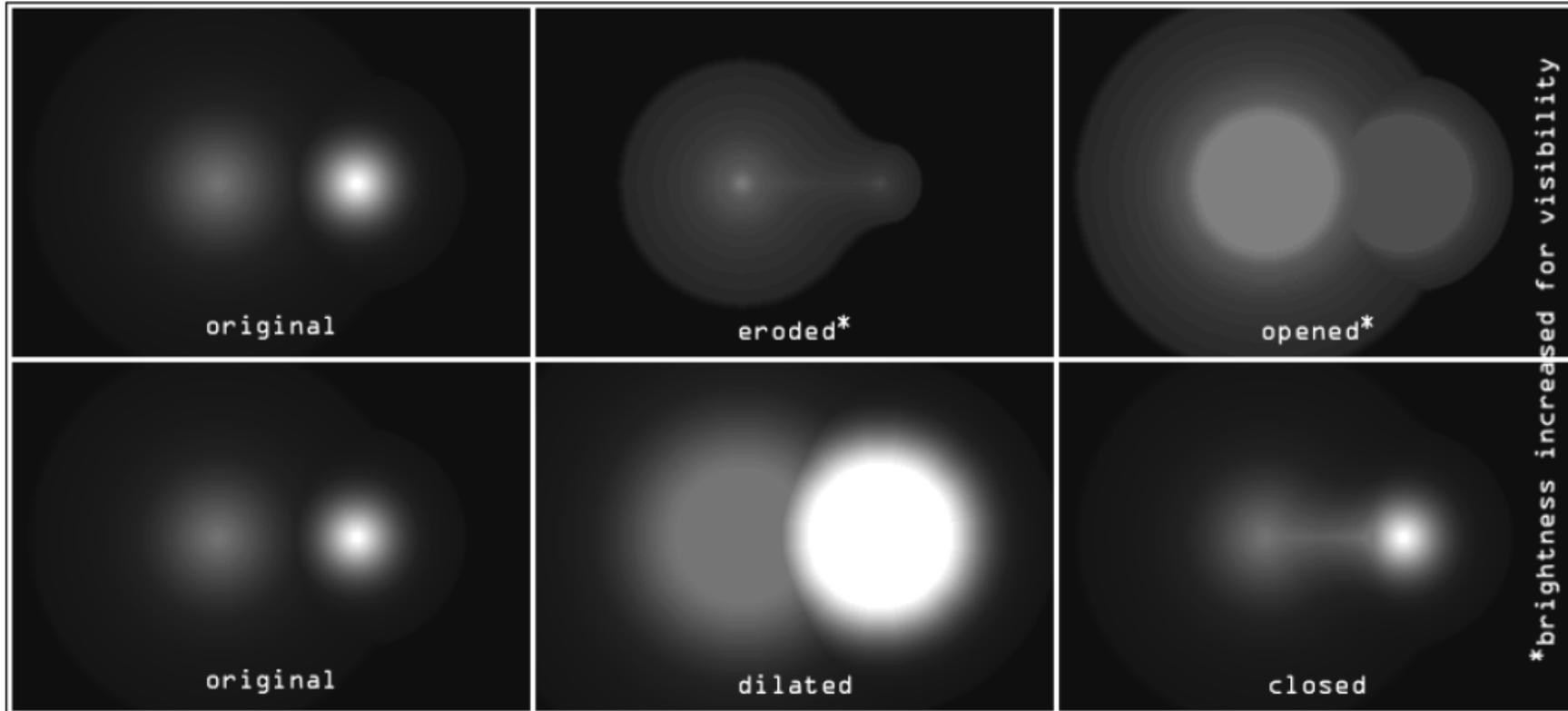
image

© 1999-2011 by Richard Alan Peters II



landscape

Morfologia in scala di grigio: principali operazioni



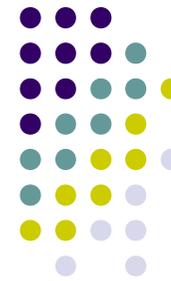
© 1999-2011 by Richard Alan Peters II

F. Tortorella

EIID 2012/2013

Università degli Studi
di Cassino e del L.M.

Erosione



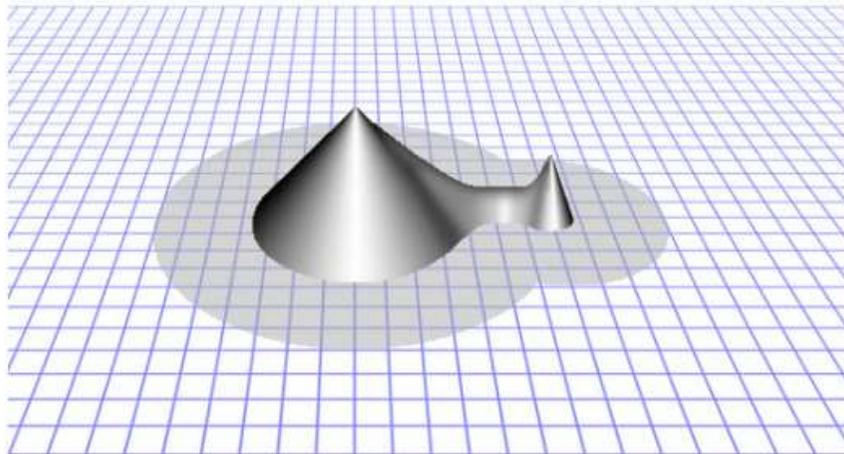
- L'erosione di f tramite uno SE flat b in un punto (x, y) è definita come il valore minimo dell'immagine nella regione coincidente con b quando l'origine di b si trova in (x, y) :

$$[f \ominus b](x, y) = \min_{(s, t) \in b} \{f(x + s, y + t)\}$$

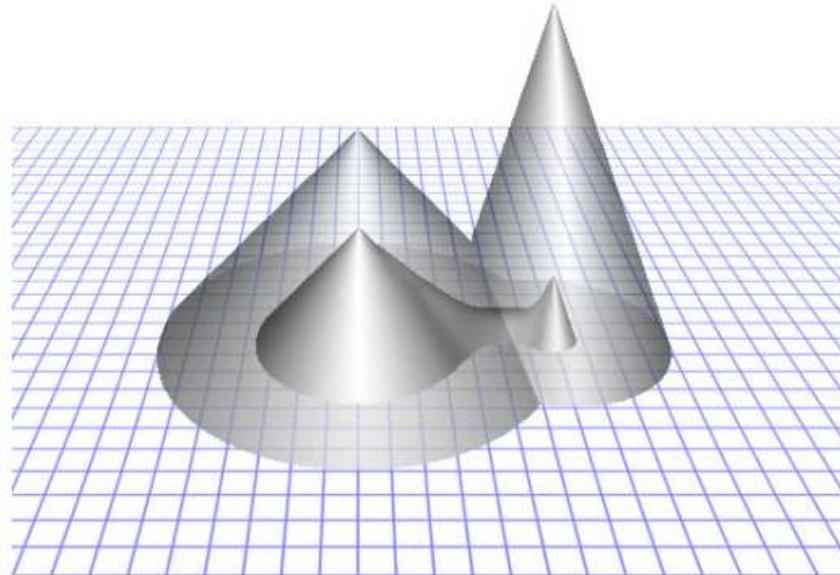
Erosione tramite uno SE flat



©1999-2011 by Richard Alan Peters II



erosion



erosion under original

SE: disco flat

Erosione tramite un SE nonflat

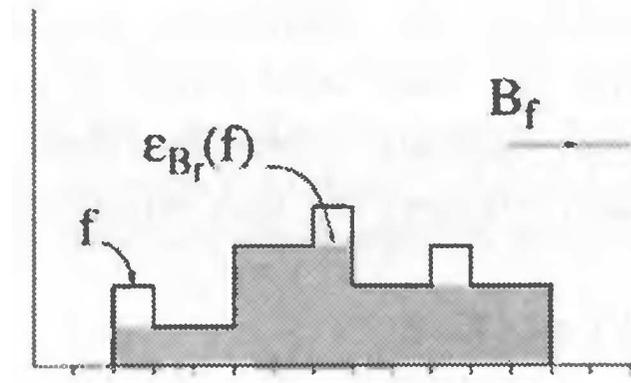
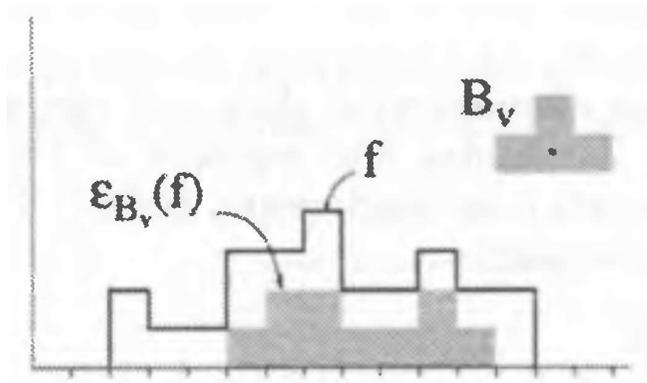


- L'erosione dell'immagine f tramite lo SE nonflat b_N è definita come:

$$[f \ominus b_N](x, y) = \min_{(s, t) \in b_N} \{f(x + s, y + t) - b_N(s, t)\}$$

- Di fatto, si sottrae il valore dello SE da f .

Erosione con SE flat e nonflat





Dilatazione

- La dilatazione di f tramite uno SE flat b in un punto (x, y) è definita come il valore massimo dell'immagine nella regione coincidente con \hat{b} quando l'origine di \hat{b} si trova in (x, y) :

$$[f \oplus b](x, y) = \max_{(s, t) \in b} \{f(x - s, y - t)\}$$

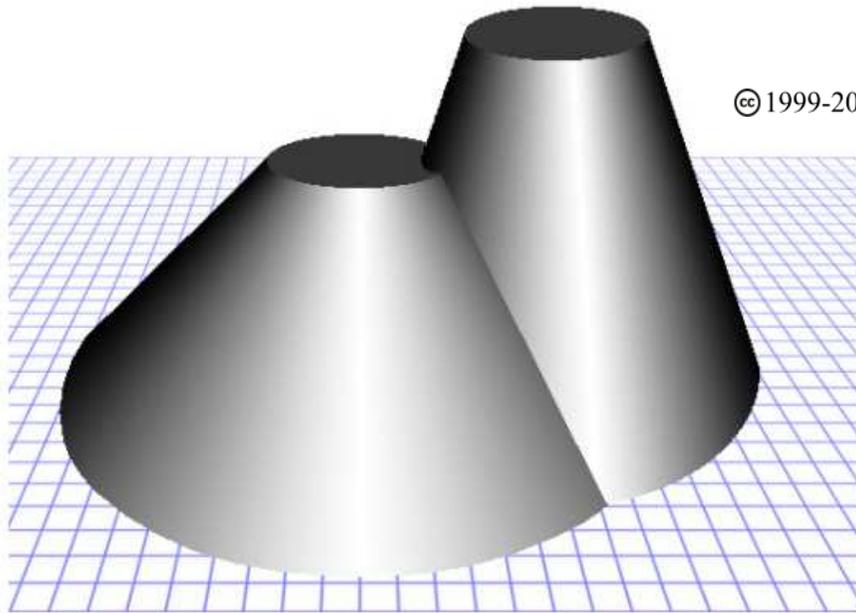
- Dove si intende:

$$\hat{b} = b(-x, -y)$$

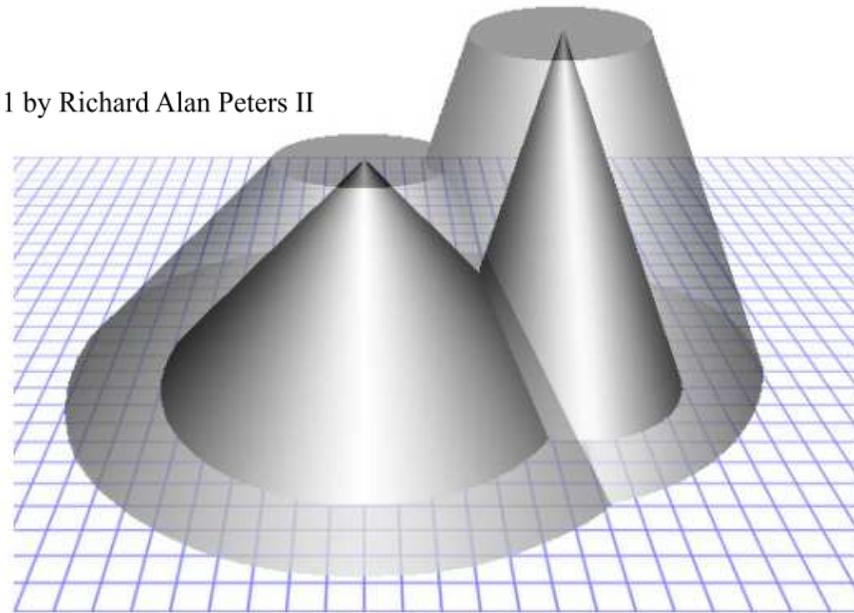
Dilatazione tramite uno SE flat



© 1999-2011 by Richard Alan Peters II



dilation



dilation over original

SE: disco flat

Dilatazione tramite un SE nonflat



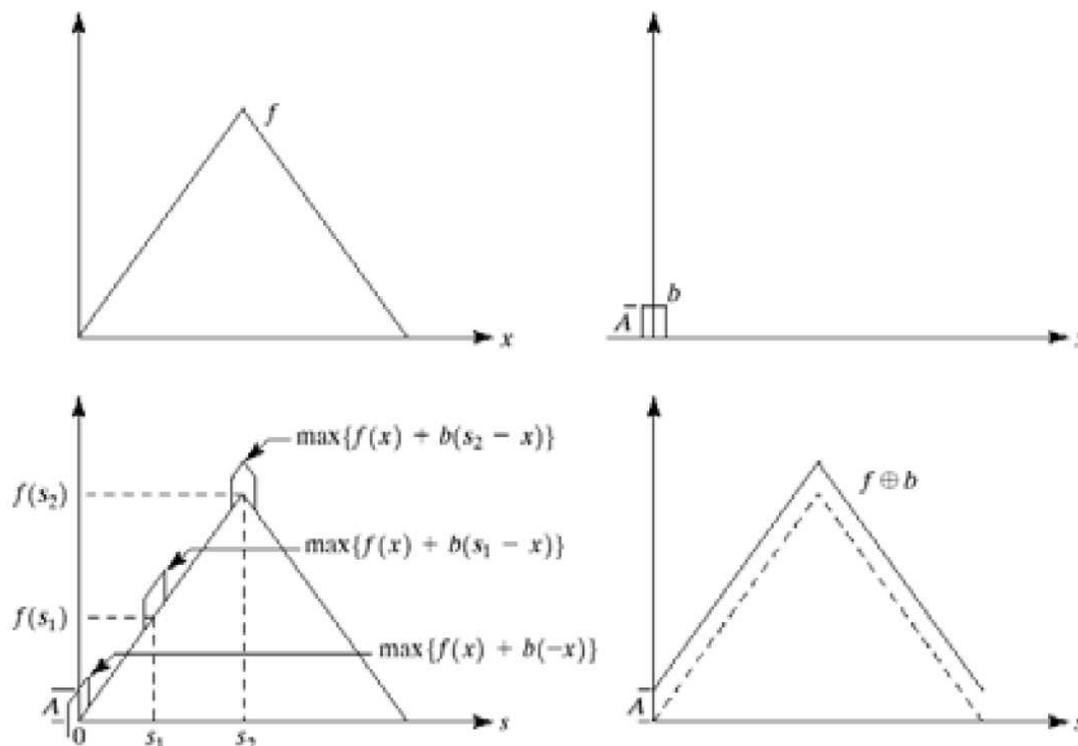
- La dilatazione dell'immagine f tramite lo SE nonflat b_N è definita come:

$$[f \oplus b_N](x, y) = \max_{(s,t) \in b_N} \{ f(x-s, y-t) + b_N(s, t) \}$$

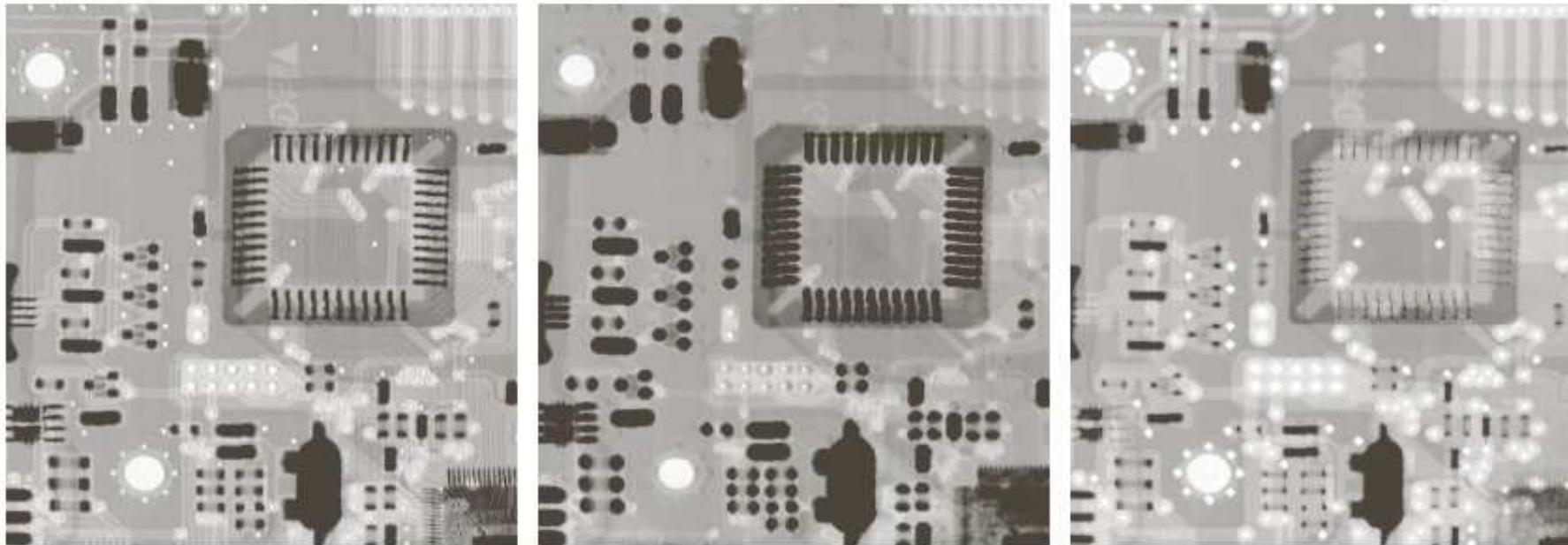
- Di fatto, si somma il valore dello SE a f .



Dilatazione con SE nonflat



Erosione e dilatazione



SE: disco flat di raggio 2 pixel

Erosione e dilatazione: dualità



- Erosione e dilatazione sono duali rispetto alla complementazione e alla riflessione:

$$(f \ominus b)^c(x, y) = (f^c \oplus \hat{b})(x, y)$$

dove: $f^c = -f(x, y)$ $\hat{b} = b(-x, -y)$

analogamente: $(f \oplus b)^c = (f^c \ominus \hat{b})$

Opening e closing in scala di grigio



- Le espressioni per l'opening ed il closing sono uguali a quanto visto nel caso delle immagini binarie.

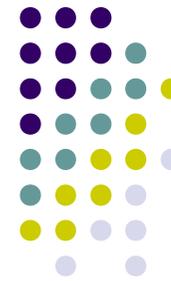
- Opening:

$$f \circ b = (f \ominus b) \oplus b$$

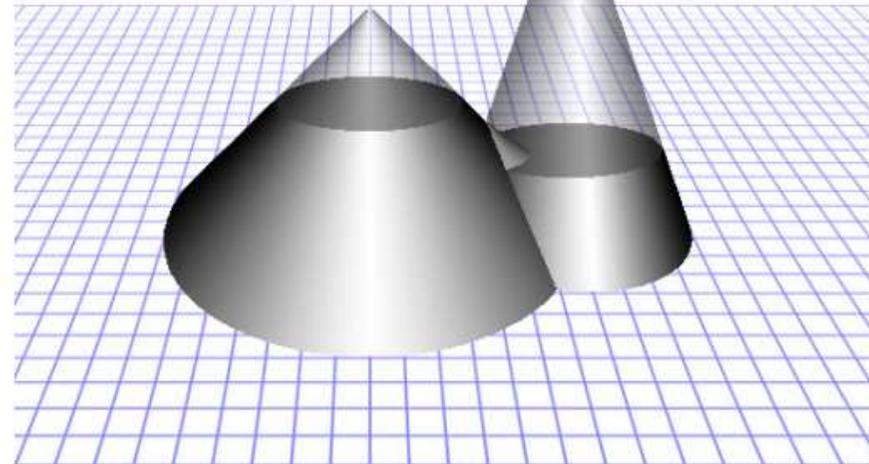
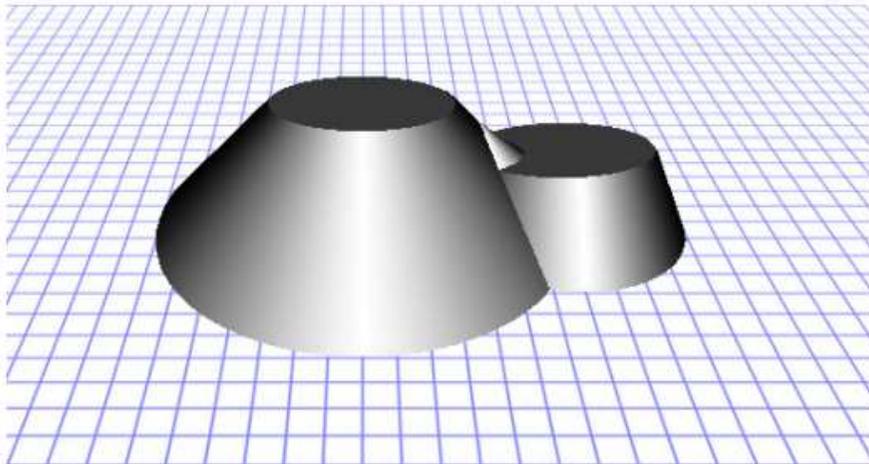
- Closing:

$$f \bullet b = (f \oplus b) \ominus b$$

Opening



©1999-2011 by Richard Alan Peters II

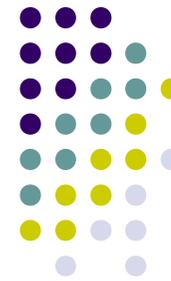


opening: erosion then dilation

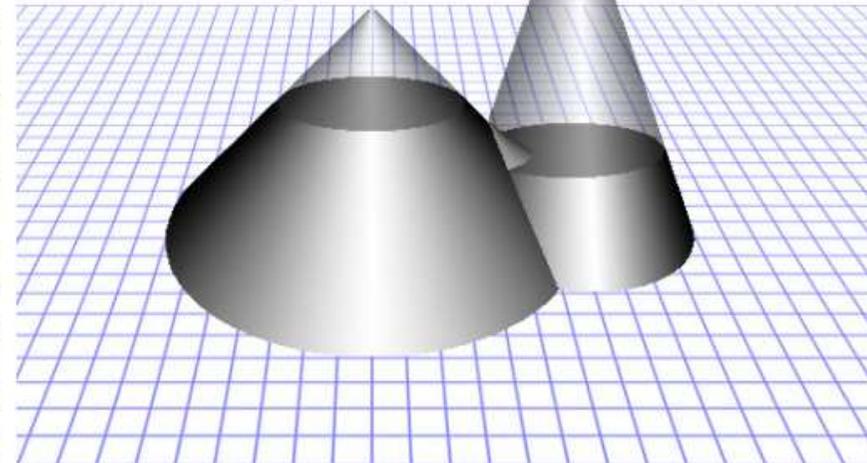
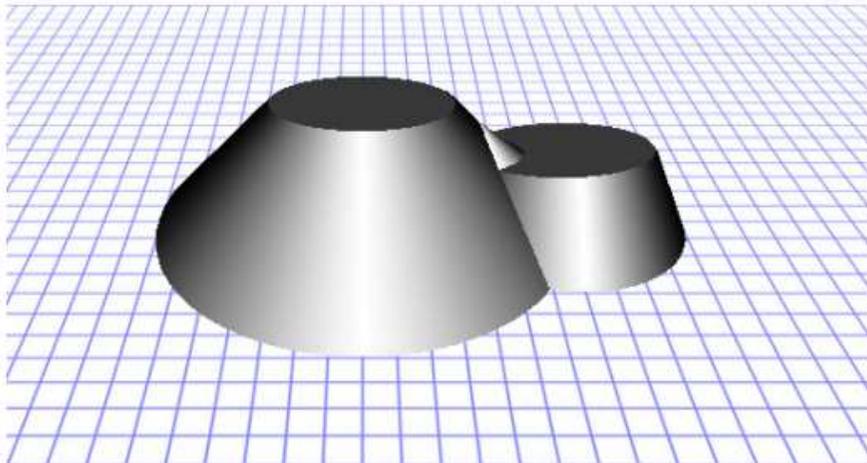
opened & original

SE: disco flat

Opening



©1999-2011 by Richard Alan Peters II



opening: erosion then dilation

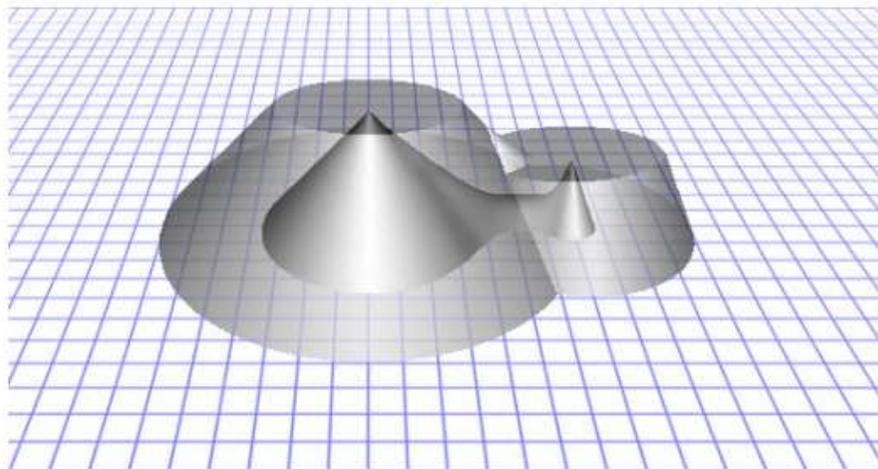
opened & original

SE: disco flat

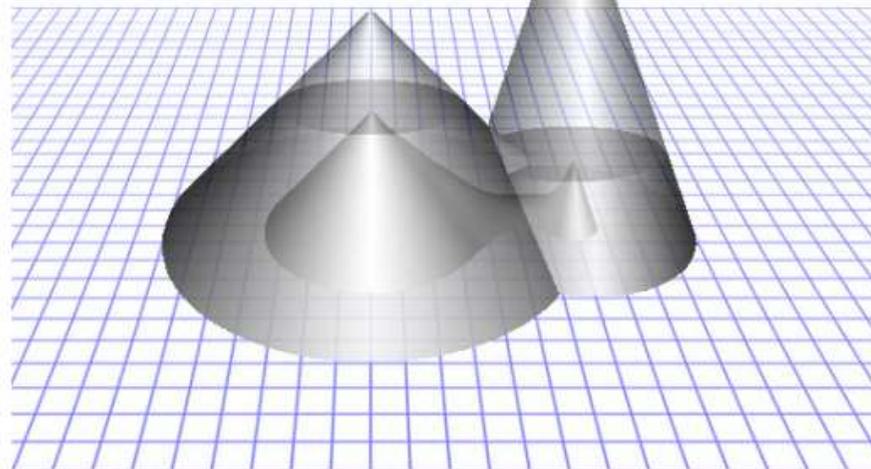
Opening



© 1999-2011 by Richard Alan Peters II



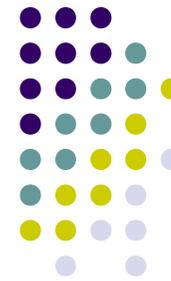
erosion & opening



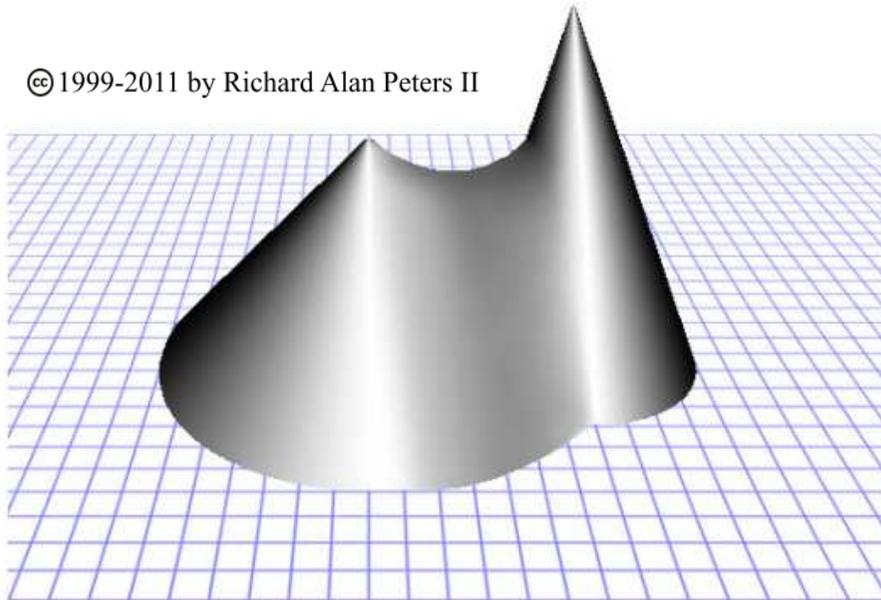
erosion & opening & original

SE: disco flat

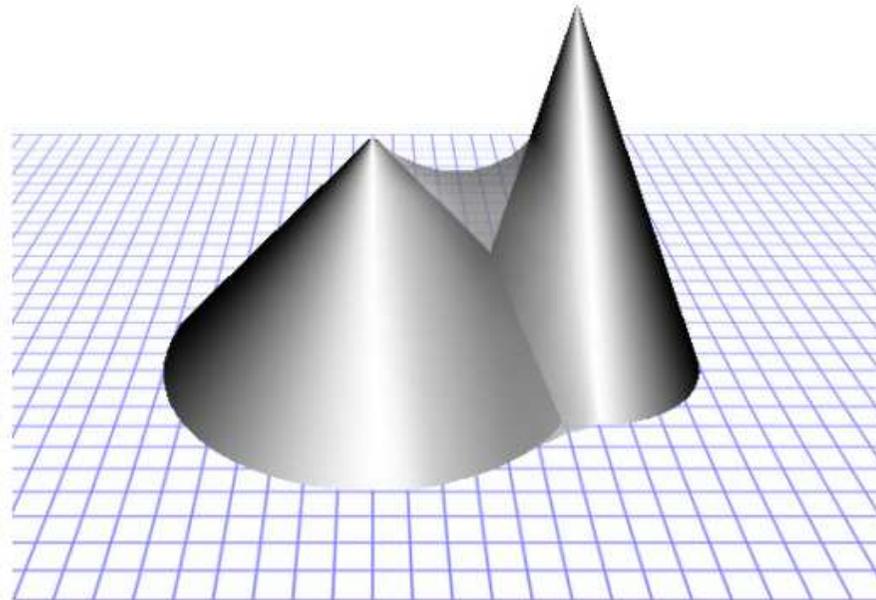
Closing



© 1999-2011 by Richard Alan Peters II



closing: dilation then erosion



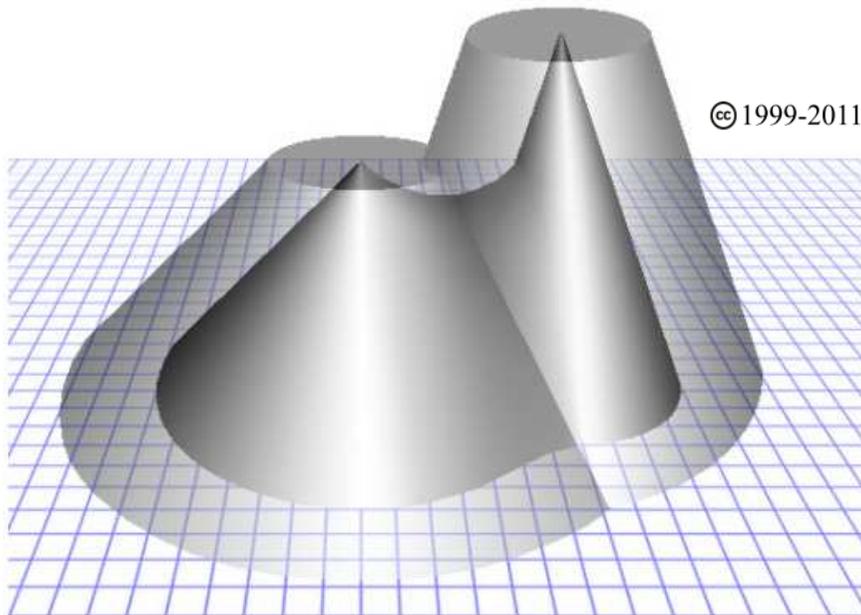
closing & original

SE: disco flat

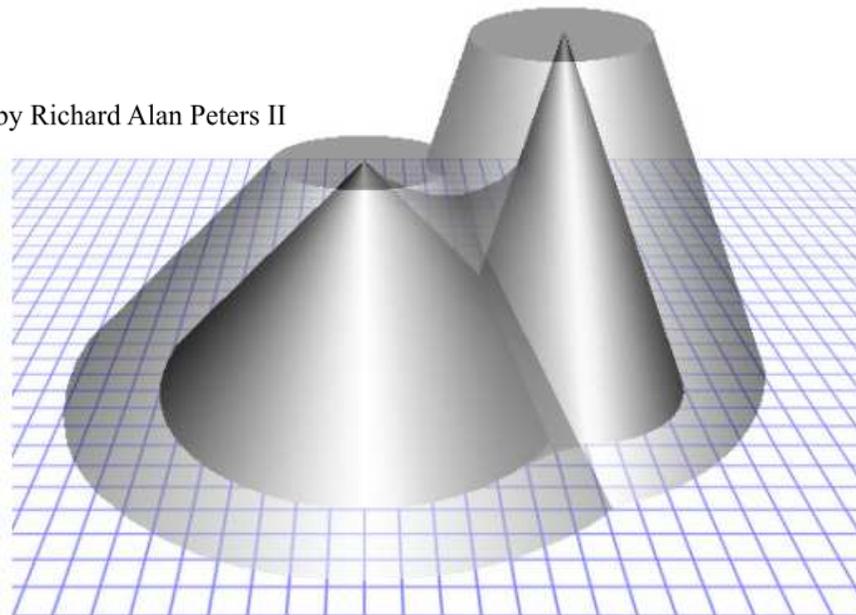
Closing



© 1999-2011 by Richard Alan Peters II



dilation over closing



dilation & closing & original

SE: disco flat

Opening e closing: dualità



Le operazioni di opening e closing sono duali rispetto al complemento e alla riflessione dello SE:

$$(f \bullet b)^c = f^c \circ \hat{b}$$

$$(f \circ b)^c = f^c \bullet \hat{b}$$

Siccome $f^c = -f(x, y)$ possiamo scrivere:

$$-(f \bullet b) = (-f \circ \hat{b})$$

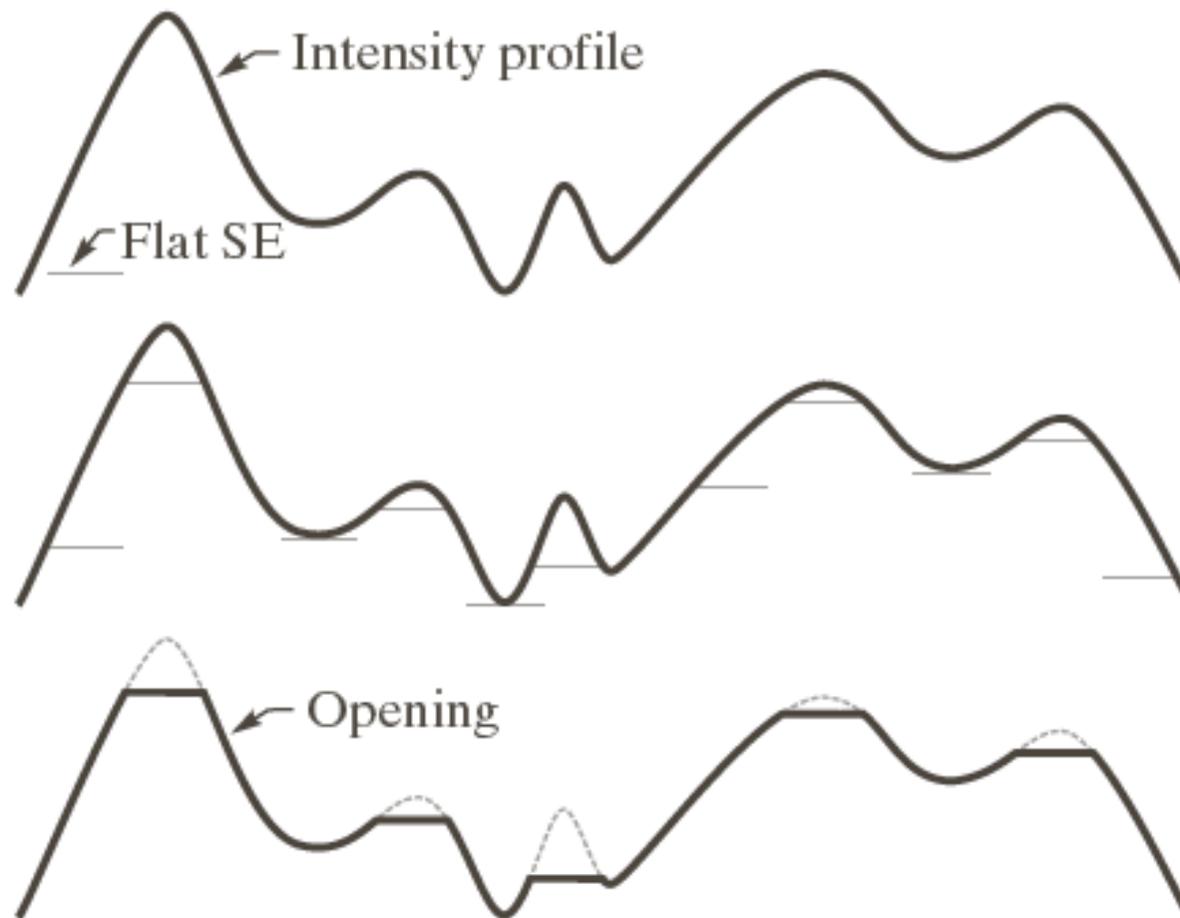
$$-(f \circ b) = (-f \bullet \hat{b})$$

Opening e closing: interpretazione geometrica



- Consideriamo la funzione immagine $f(x, y)$ come una superficie 3D con i suoi valori di intensità interpretati come valori di altezza sul piano xy .
- L'opening di f tramite b può essere interpretata geometricamente come la spinta dello SE dal basso verso l'alto contro la sottosuperficie di f .

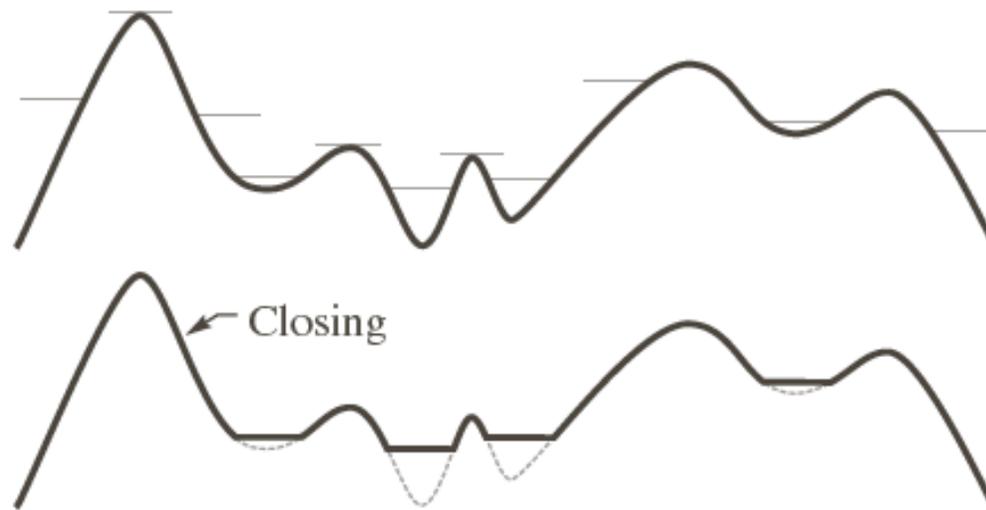
Opening e closing: interpretazione geometrica



Opening e closing: interpretazione geometrica



- Interpretazione analoga per il closing, solo che stavolta lo SE viene spinto dall'alto sulla parte superiore della superficie.



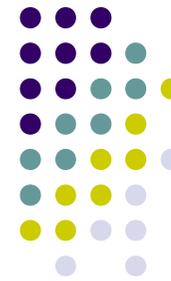
Opening: proprietà



- L'operazione di opening in scala di grigio gode delle seguenti proprietà:
 - a) $f \circ b \sqsubseteq f$ **non-expanding**
 - b) *If $f_1 \sqsubseteq f_2$, then $(f_1 \circ b) \sqsubseteq (f_2 \circ b)$* **increasing**
 - c) $(f \circ b) \circ b = f \circ b$ **idempotent**

dove la notazione $e \sqsubseteq r$ indica che il dominio di e è un sottinsieme del dominio di r e che $e(x,y) \leq r(x,y)$ per ogni (x,y) .

Closing: proprietà



- L'operazione di closing in scala di grigio gode delle seguenti proprietà:

a) $f \leftarrow f \bullet b$ **expanding**

b) *If $f_1 \leftarrow f_2$, then $(f_1 \bullet b) \leftarrow (f_2 \bullet b)$* **increasing**

c) $(f \bullet b) \bullet b = f \bullet b$ **idempotent**

dove la notazione $e \leftarrow r$ indica che il dominio di e è un sottinsieme del dominio di r e che $e(x,y) \leq r(x,y)$ per ogni (x,y) .

Opening in scala di grigio: caratteristiche di filtraggio



- L'applicazione dell'opening in scala di grigio rimuove tutte le strutture formate da regioni di intensità maggiore del vicinato e che non sono sufficientemente ampie per “contenere” lo SE.
- In altre parole, l'opening rimuove gli oggetti chiari (rispetto allo sfondo) più piccoli dello SE.

Opening in scala di grigio: caratteristiche di filtraggio



Original image f .



Erosion $\varepsilon_B(f)$.



Opening $\gamma_B(f) = \delta_B[\varepsilon_B(f)]$.

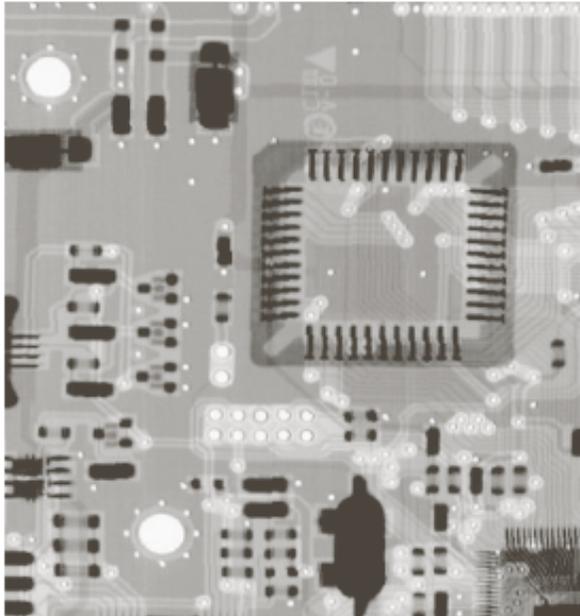
SE: linea verticale di lunghezza pari a 1/3 dell'altezza dell'immagine

Closing in scala di grigio: caratteristiche di filtraggio

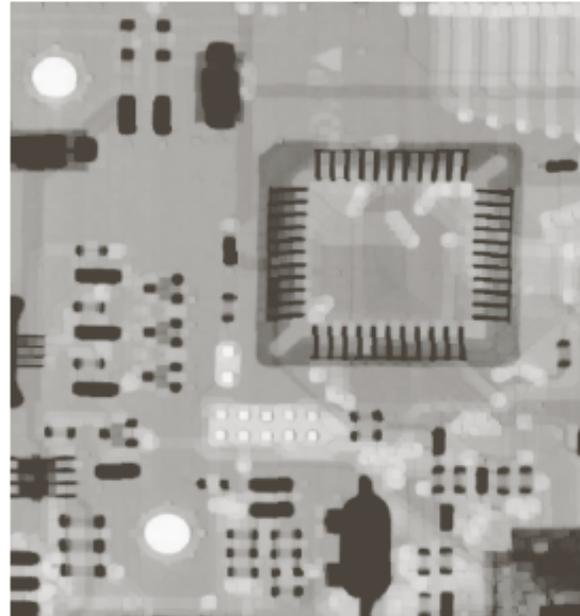


- L'applicazione del closing in scala di grigio rimuove tutte le strutture formate da regioni di intensità minore del vicinato e che non sono sufficientemente ampie per “contenere” lo SE.
- In altre parole, il closing rimuove gli oggetti scuri (rispetto allo sfondo) più piccoli dello SE.

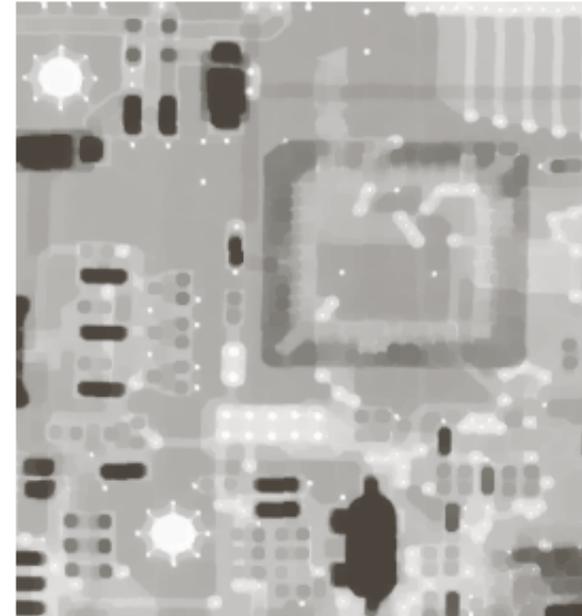
Opening e closing: caratteristiche di filtraggio



originale



Opening
SE: disco di raggio
3 pixel



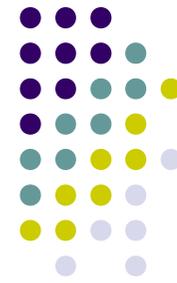
Closing
SE: disco di raggio
5 pixel

Algoritmi morfologici in scala di grigio



- L'applicazione combinata di operazioni morfologiche di base e di operazioni "algebriche" (differenza tra immagini, intersezione, ...) permette la definizione di algoritmi di elaborazione estremamente utili.
- Esempi:
 - Smoothing morfologico
 - Gradiente morfologico
 - Trasformate top/bottom-hat
 - Ricostruzione morfologica

Smoothing morfologico



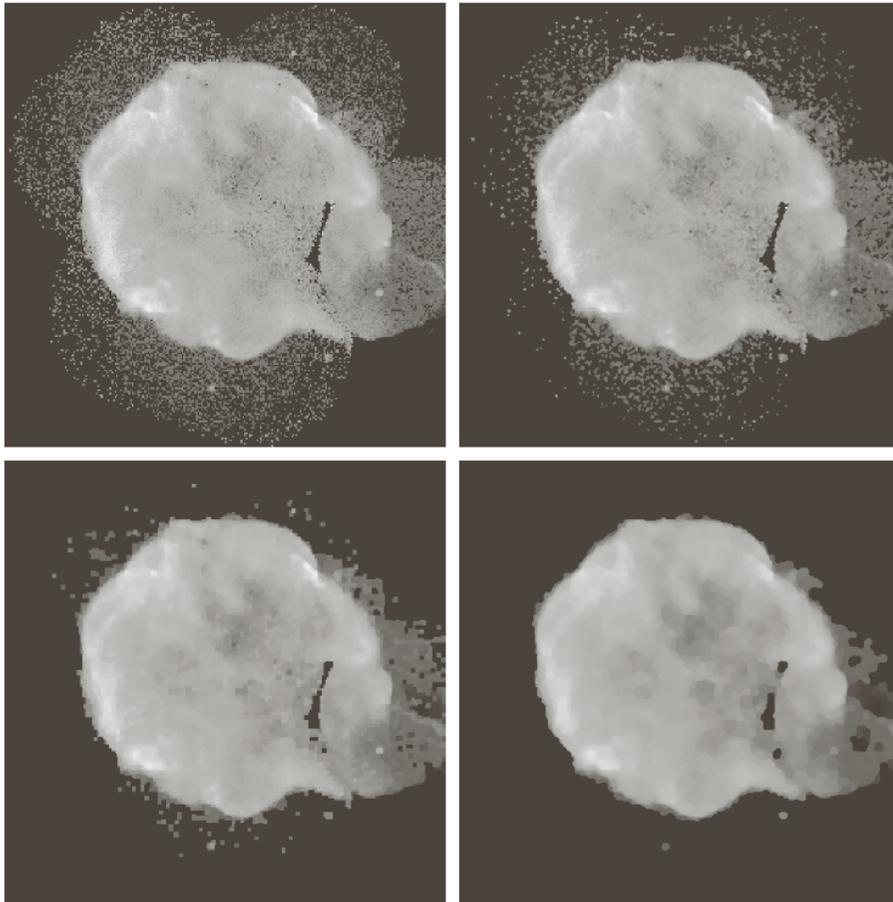
- L'opening elimina i dettagli chiari più piccoli dello SE specificato, mentre il closing elimina i dettagli scuri.
- E' possibile combinare l'azione delle due operazioni per lo smoothing dell'immagine e l'eliminazione del rumore.

Smoothing morfologico



- In pratica, si alternano operazioni di closing e opening, partendo con un piccolo SE e quindi procedendo con SE sempre maggiori finché si raggiunge una data dimensione.
- Questa applicazione sequenziale di opening-closing (o closing-opening) viene definita *filtraggio sequenziale alternante* (Alternating Sequential Filtering o ASF).

Smoothing morfologico



ASF opening-closing
con SE dischi di
raggio 1, 3, 5 pixel

Gradiente morfologico (gradiente di Beucher)



- Viene definito come differenza tra dilatazione ed erosione di un'immagine:

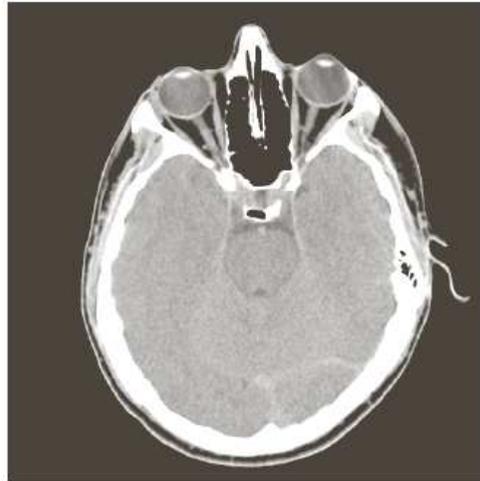
$$g = (f \oplus b) - (f \ominus b)$$

- L'operazione enfatizza i limiti tra regioni diverse, mentre le regioni omogenee vengono di fatto eliminate (se lo SE è sufficientemente piccolo).
- Il risultato è un effetto gradiente di tipo derivativo.

Gradiente morfologico (gradiente di Beucher)



originale



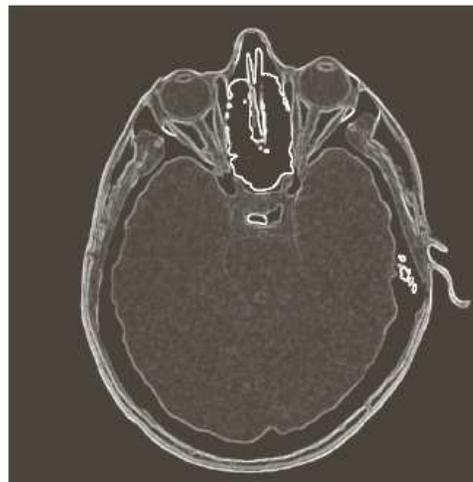
dilation



erosion



differenza=
gradiente



Trasformate top-hat e bottom-hat



- Si definisce trasformata top-hat di un'immagine f tramite uno SE b la differenza:

$$T_{\text{hat}}(f, b) = f - (f \circ b)$$

- Analogamente la trasformata bottom-hat si definisce come:

$$B_{\text{hat}}(f, b) = (f \bullet b) - f$$

Trasformate top-hat e bottom-hat



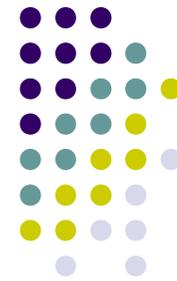
- Una delle applicazioni principali di queste trasformate è la individuazione di oggetti tramite un opportuno SE.
- Lo SE è scelto in modo tale che l'operazione di opening/closing rimuova gli oggetti di interesse.
- La successiva sottrazione con l'immagine originale recupera le strutture cercate.

Trasformate top-hat e bottom-hat



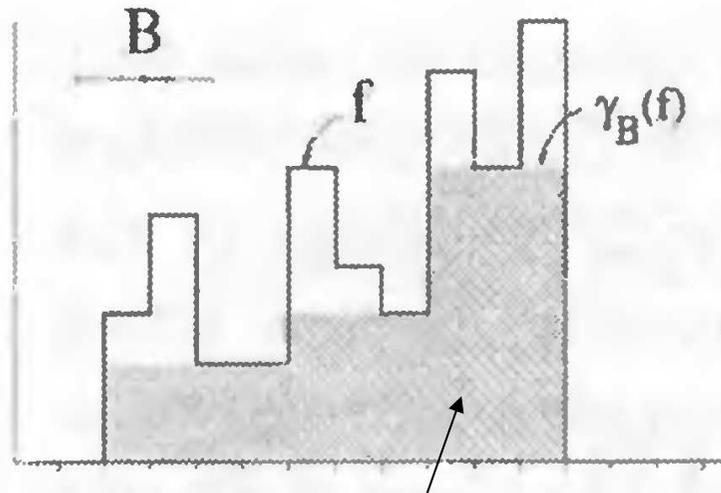
- Approccio efficace perché non sempre si conosce ugualmente bene ciò che un oggetto è e ciò che un oggetto non è.
- A volte rimuovere dall'immagine gli oggetti rilevanti è più facile che rimuovere quelli non rilevanti.
- Su questa considerazione si basano le trasformate top/bottom-hat.

Trasformata top-hat

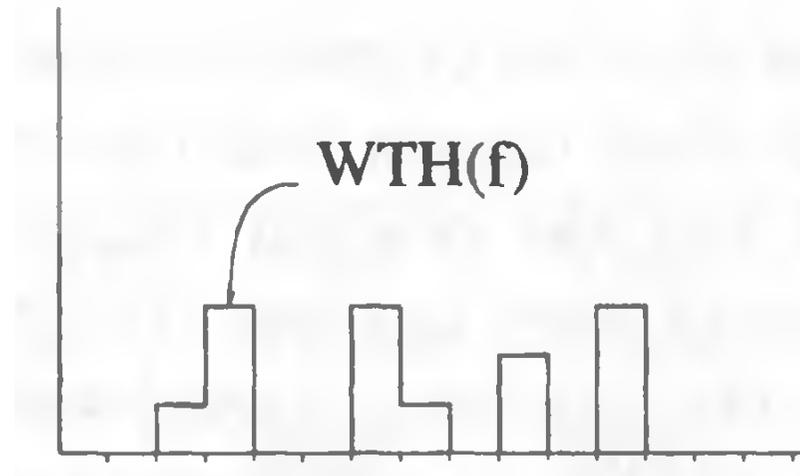


- La trasformata top-hat restituisce un'immagine contenente gli oggetti dell'immagine di partenza che:
 - Sono “più piccoli” dello SE (pattern all'interno dei quali lo SE non può essere contenuto)
 - Hanno intensità luminosa maggiore rispetto al loro vicinato
- Per questo si definisce anche trasformata ***White Top-Hat*** (WTH transform).

Trasformata top-hat

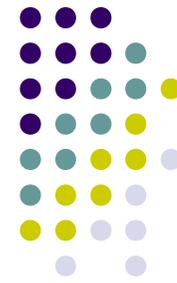


$$f \circ B$$



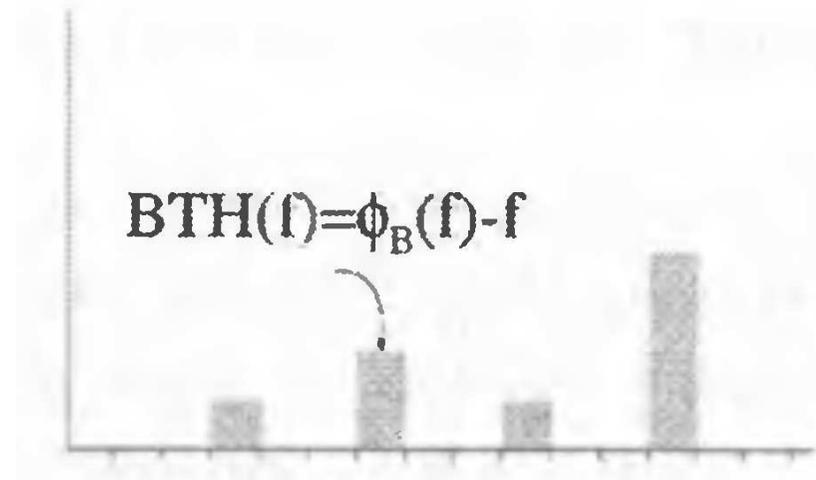
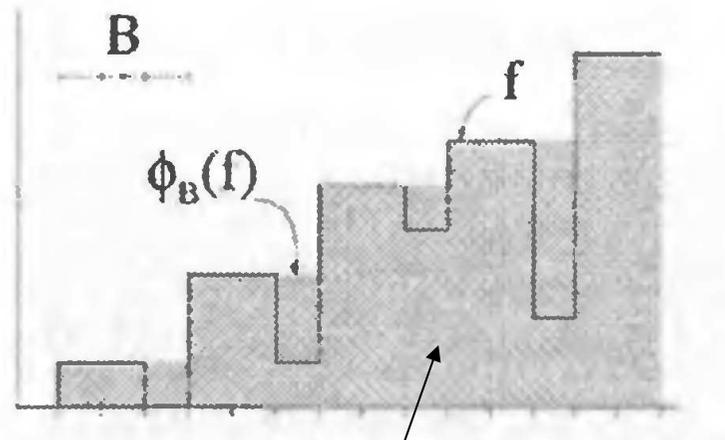
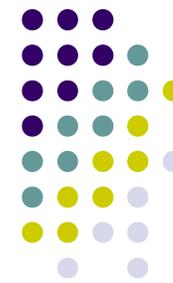
Si noti come il risultato della trasformata non dipenda dall'intensità del plateau su cui poggiano i picchi estratti.

Trasformata bottom-hat



- La trasformata bottom-hat restituisce un'immagine contenente gli oggetti dell'immagine di partenza che:
 - Sono “più piccoli” dello SE (pattern all'interno dei quali lo SE non può essere contenuto)
 - Hanno intensità luminosa minore rispetto al loro vicinato
- Per questo si definisce anche trasformata ***Black Top-Hat*** (BTH transform).

Trasformata bottom-hat



$$f \bullet B$$

Si noti come il risultato della trasformata non dipenda dall'intensità del plateau superiore da cui calano le "cavità" estratte.

Top-hat autocomplementare



- La somma della WTH e della BTH applicate ad una stessa immagine conterrà tutte le strutture che non possono contenere lo SE impiegato, quale che sia la natura del contrasto locale (se siano picchi o cavità).
- Tale tipo di trasformata è conosciuta anche come ***top-hat autocomplementare*** (*self-complementary top-hat*).
- Di fatto, la somma di WTH e BTH è equivalente alla differenza tra closing e opening:

$$(f - f \circ B) + (f \bullet B - f) = f \bullet B - f \circ B$$

Trasformate WTH e BTH: consigli per l'uso



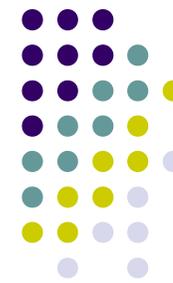
- La forma e la dimensione dello SE da utilizzare nella trasformata dipende dalla morfologia delle strutture che si è interessati ad estrarre.
- P. es., se si intende estrarre picchi (strutture più luminose del loro vicinato) di ampiezza minore di L , va usata una trasformazione WTH con uno SE a forma di disco di diametro leggermente maggiore di L così da rimuovere le strutture di interesse nel passo di opening (e analogamente con la trasformata BTH, nel caso si cerchino strutture più scure del loro vicinato).

Trasformate WTH e BTH: consigli per l'uso



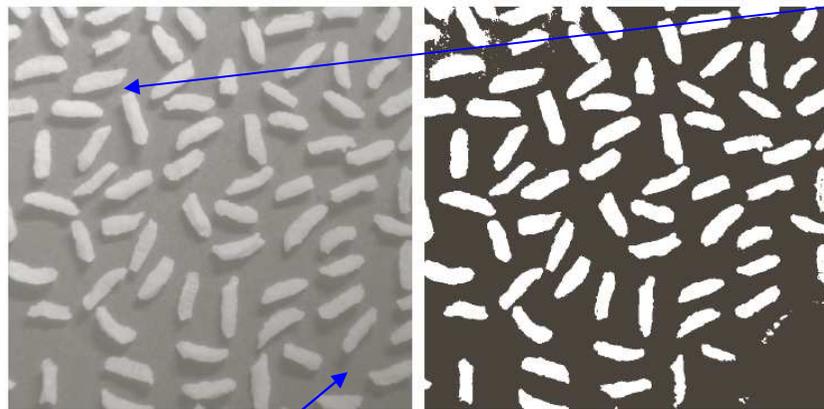
- Nel caso sia presente del rumore ad alta frequenza spaziale nell'immagine di partenza, questa deve essere filtrata prima dell'applicazione della trasformata per evitare effetti collaterali.
- In questi casi, è opportuno applicare un closing con uno SE di piccole dimensioni all'immagine di input prima di effettuare la trasformata top-hat.
- Analogamente, va applicato un opening con uno SE di piccole dimensioni all'immagine di input prima di effettuare la trasformata bottom-hat.

Correzione di illuminazione di sfondo non uniforme



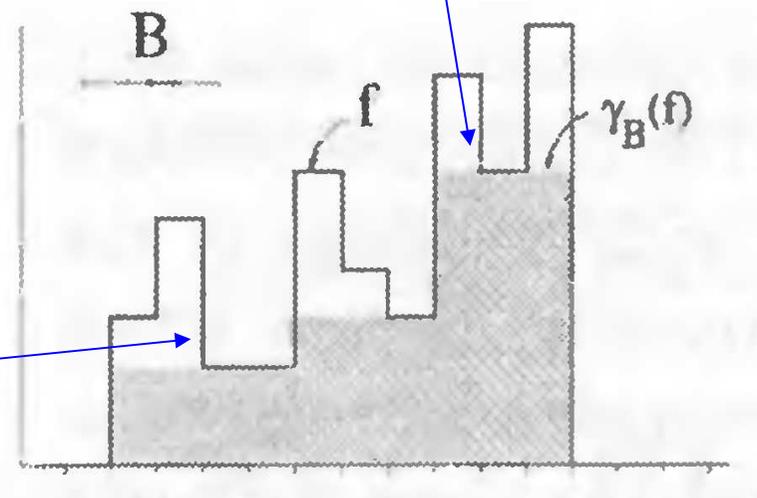
- Nel processo di estrazione degli oggetti dallo sfondo in un'immagine a scala di grigio, un'operazione molto diffusa è la sogliatura (thresholding) con cui si individuano gli oggetti imponendo una soglia sulla luminosità esibita dai pixel.
- In questo caso, un'illuminazione non uniforme dello sfondo potrebbe portare a risultati insoddisfacenti.

Correzione di illuminazione di sfondo non uniforme

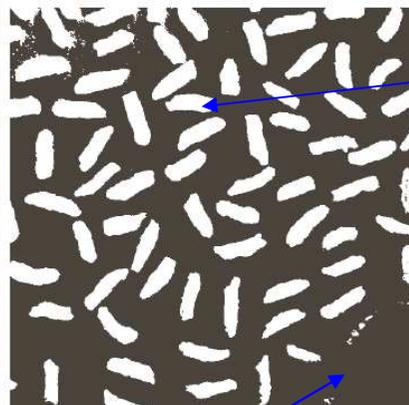


Zona a sfondo più chiaro

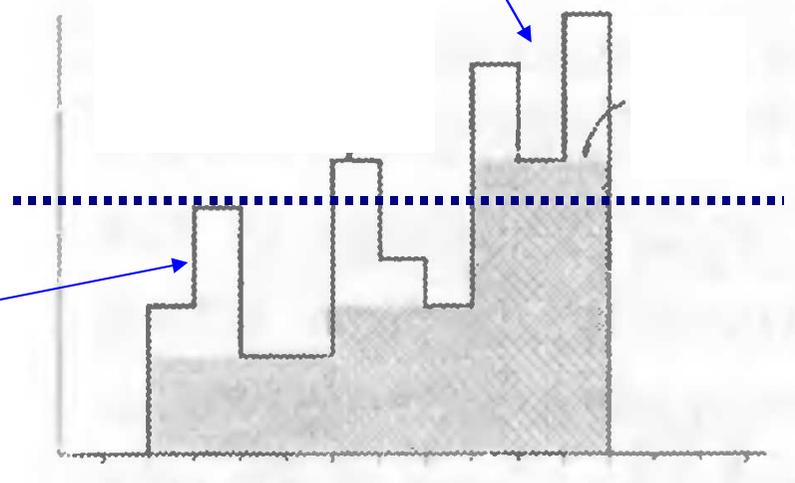
Zona a sfondo più scuro



Correzione di illuminazione di sfondo non uniforme

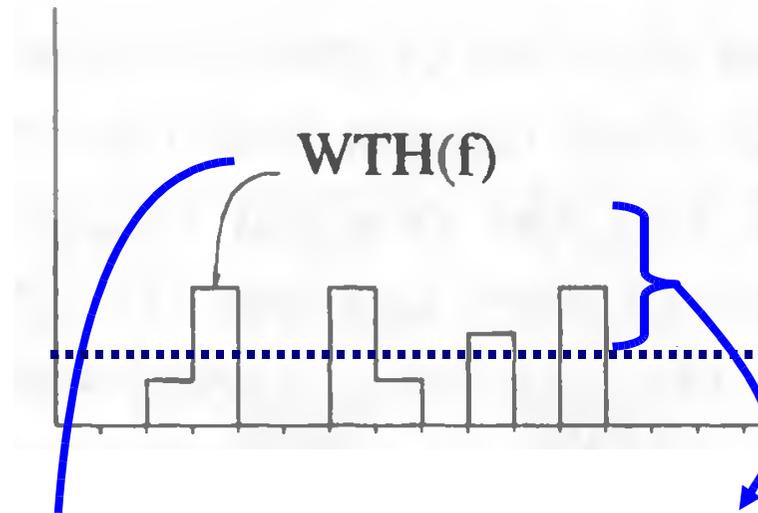
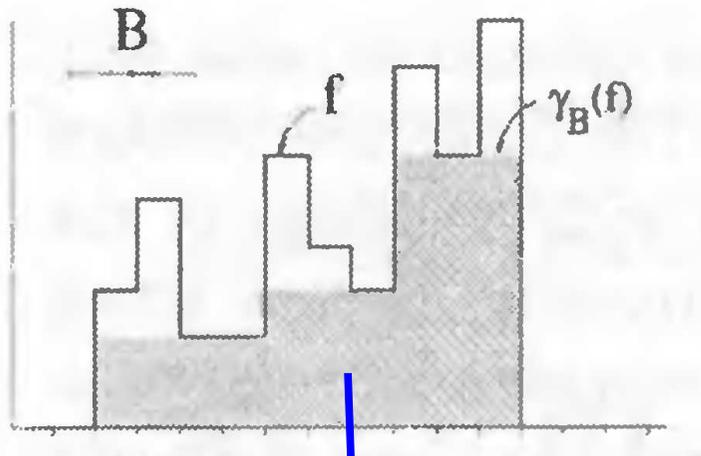


Oggetti sogliai correttamente

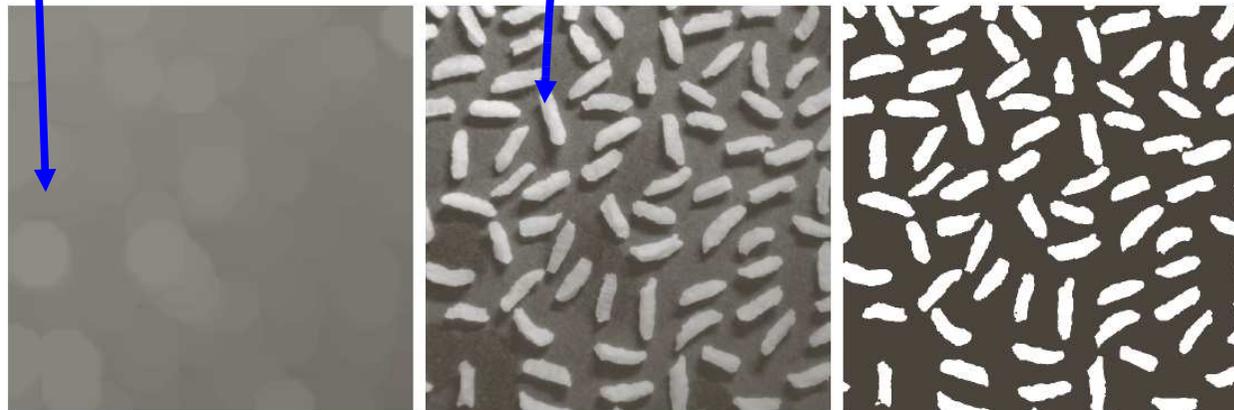


Oggetti non correttamente sogliai

Correzione di illuminazione di sfondo non uniforme



Opening
utilizzando
come SE un
disco di
raggio 40.



Dilatazione ed erosione geodetiche in scala di grigio



- Come nel caso delle immagini binarie, sono operazioni definite su tre immagini:
 - l'*immagine marker* contiene i punti iniziali per la trasformazione
 - l'*immagine maschera* vincola l'estensione della trasformazione
 - lo structuring element

Dilatazione geodetica in scala di grigio

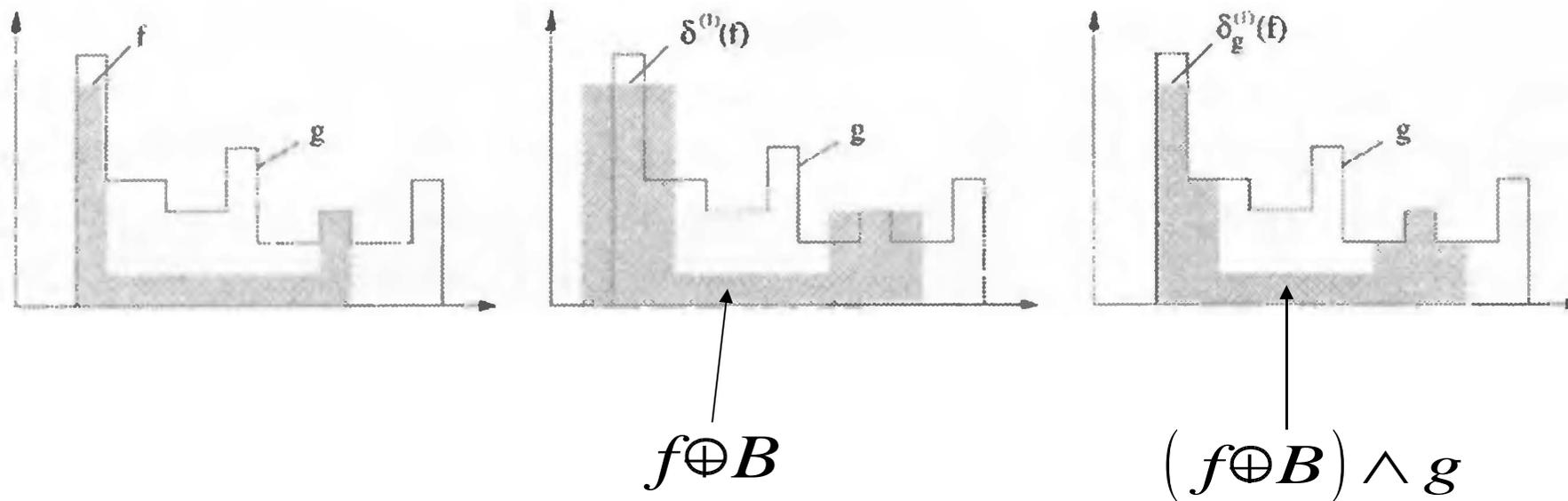


- Definiamo f l'immagine marker e g l'immagine maschera; sia inoltre $f \subseteq g$.
- La dilatazione geodetica di taglia 1 del marker rispetto alla maschera è definita come:

$$D_g^{(1)}(f) = (f \oplus B) \wedge g$$

dove \wedge indica l'operatore di minimo puntuale.

Dilatazione geodetica in scala di grigio



Dilatazione geodetica in scala di grigio



- E' possibile considerare diverse applicazioni successive dell'operazione.
- Si definisce dilatazione geodetica di taglia n la procedura:

$$D_g^{(n)}(f) = D_g^{(1)} \left[D_g^{(n-1)}(f) \right]$$

dove:

$$D_g^{(0)}(f) = f$$

Erosione geodetica in scala di grigio

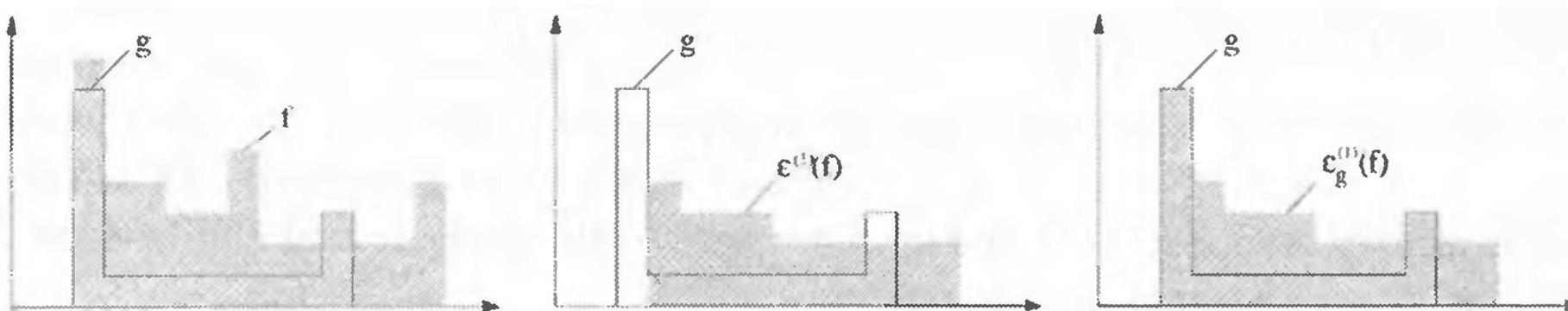


- Definiamo f l'immagine marker e g l'immagine maschera; sia inoltre $g \subseteq f$.
- L'erosione geodetica di taglia 1 del marker rispetto alla maschera è definita come:

$$E_g^{(1)}(f) = (f \ominus B) \vee g$$

dove \vee indica l'operatore di massimo puntuale.

Erosione geodetica in scala di grigio



Erosione geodetica in scala di grigio



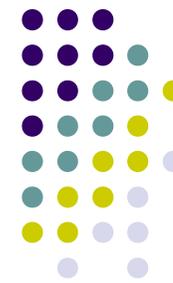
- E' possibile considerare diverse applicazioni successive dell'operazione.
- Si definisce erosione geodetica di taglia n la procedura:

$$E_g^{(n)}(f) = E_g^{(1)} \left[E_g^{(n-1)}(f) \right]$$

dove:

$$E_g^{(0)}(f) = f$$

Ricostruzione morfologica in scala di grigio



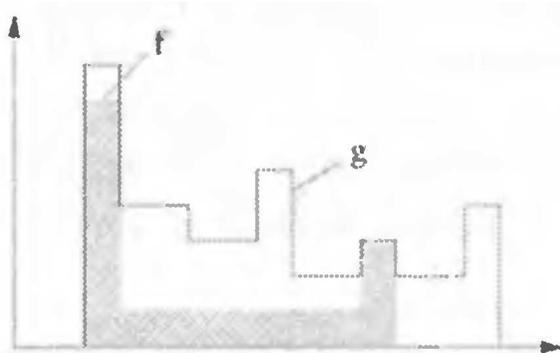
- La ricostruzione morfologica attraverso la dilatazione di un'immagine maschera g a partire da un marker f viene definita come un'applicazione iterativa della dilatazione geodetica fin quando si raggiunge una condizione di stabilità:

$$R_g^D(f) = D_g^{(k)}(f)$$

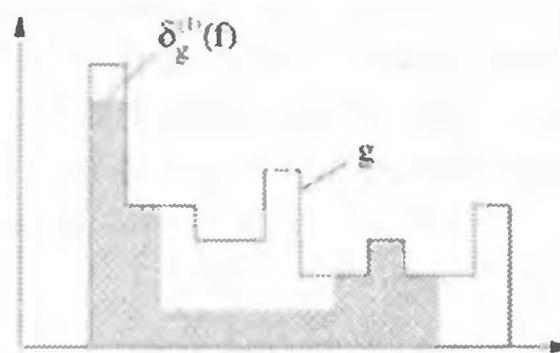
dove:

$$D_g^{(k)}(f) = D_g^{(k+1)}(f)$$

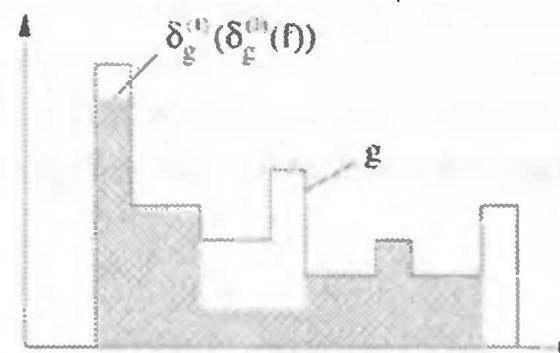
Ricostruzione morfologica in scala di grigio



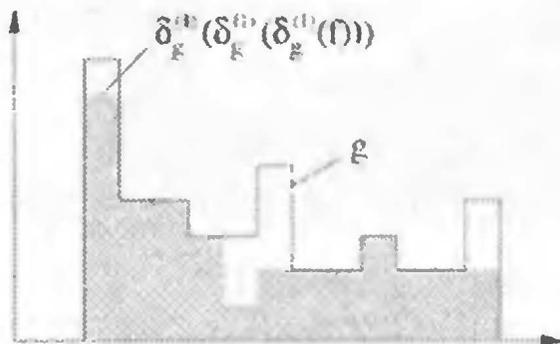
(a) 1-D marker signal f and mask signal g .



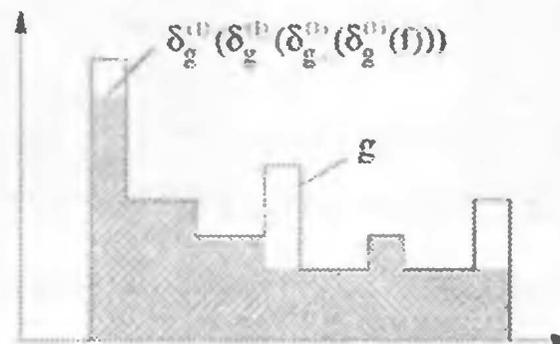
(b) Geodesic dilation of size 1 of f with respect to g .



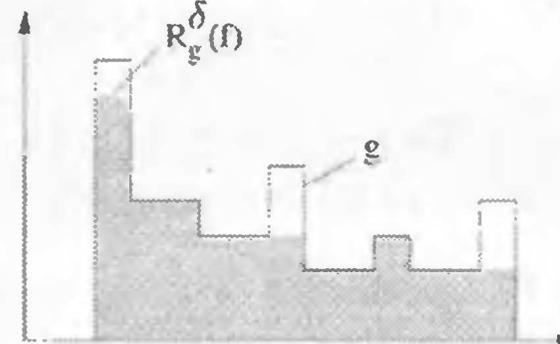
(c) Geodesic dilation of size 2 of f with respect to g .



(d) Geodesic dilation of size 3 of f with respect to g .



(e) Geodesic dilation of size 4 of f with respect to g .



(f) Geodesic dilation of size 5 of f with respect to g .

Ricostruzione morfologica: opening attraverso ricostruzione



- Come visto nel caso delle immagini binarie, con l'operazione di opening, l'erosione rimuove piccoli patch e la successiva dilatazione tenta di restaurare la forma degli oggetti precedenti, ma la qualità del risultato dipende dallo SE utilizzato.
- Con l'operazione di opening attraverso la ricostruzione si restaurano esattamente le forme degli oggetti sopravvissuti all'erosione.

Ricostruzione morfologica: opening attraverso ricostruzione

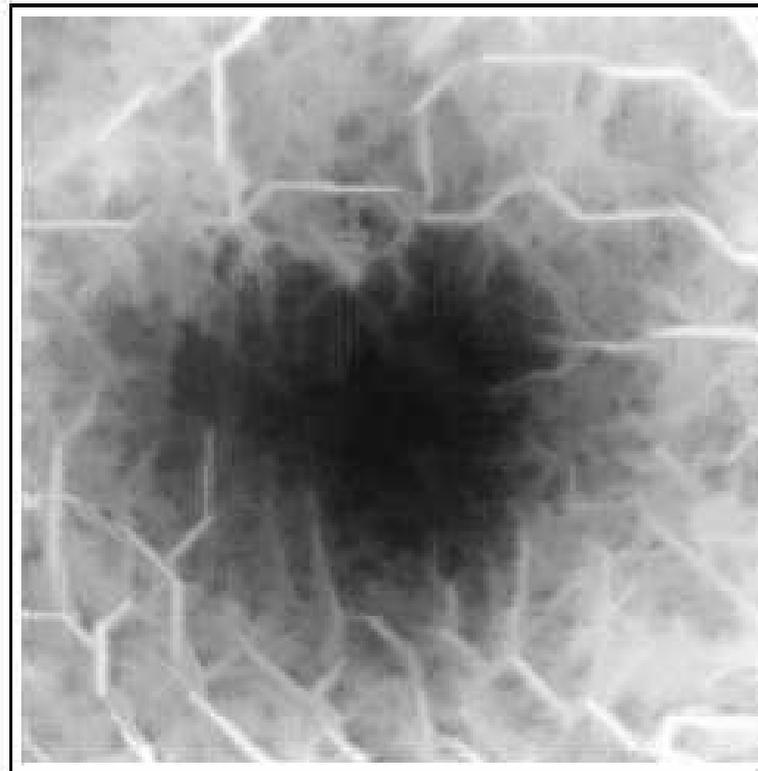
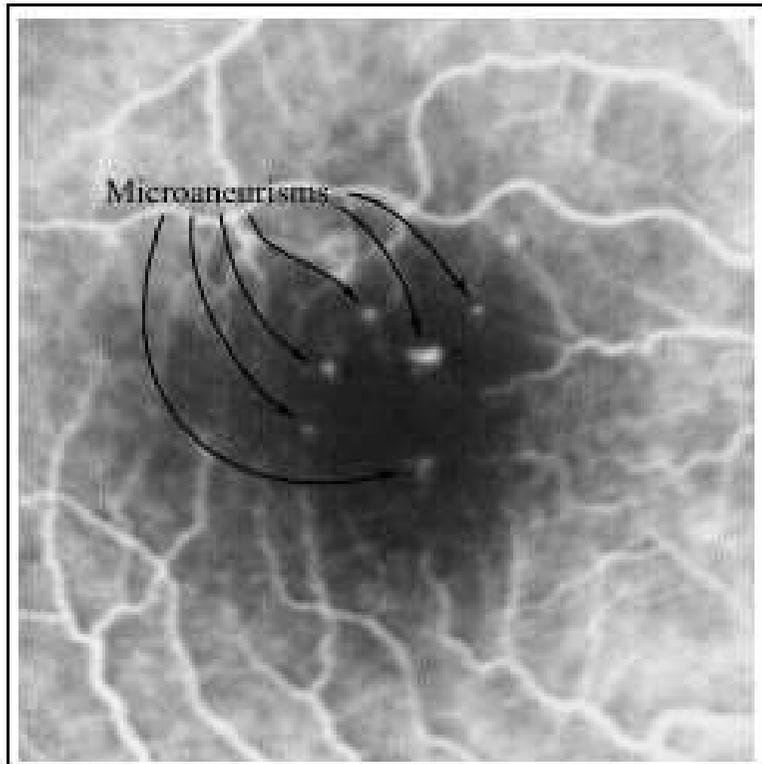


- L'opening attraverso la ricostruzione di taglia n si definisce come:

$$O_g^{(n)}(f) = R_f^D[f \ominus nB]$$

- Dove $(f \ominus nB)$ indica n erosioni di f attraverso B

Ricostruzione morfologica in scala di grigio



Max di opening con SE lineari di diversa
inclinazione

Ricostruzione morfologica in scala di grigio

