

## מתמטיקה בדידה – תרגיל 4

הערה: תרגיל זה עוסק בפונקציות **מלאות** בלבד. בכל מקום בו נכתב "פונקציה" הכוונה היא ל"פונקציה מלאה".

1. תהיינה  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ . הציגו דוגמא לפונקציות המקיימות את התנאי המצוין (בשאלה זו אין צורך להסביר או להוכיח).

- א.  $f : A \rightarrow A$  חח"ע ועל.  
 ב.  $f : A \rightarrow B$  חח"ע ואינה על.  
 ג.  $f : B \rightarrow A$  על ואינה חח"ע.  
 ד.  $f : B \rightarrow A$  אינה חח"ע ואינה על.  
 ה.  $f : \mathbb{N} \rightarrow P(\mathbb{N})$  חח"ע.  
 ו.  $f : P(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$  על.

2. הוכיחו/הפריכו:

- א. לכל שלוש קבוצות  $A, B, C$  מתקיים  $(A \times C) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times C$ .  
 ב. לכל ארבע קבוצות  $A, B, C, D$  מתקיים  $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$ .  
 ג. קיימות ארבע קבוצות  $A, B, C, D$  עבורן מתקיים  $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$ .

3. לכל אחת מהפונקציות המוגדרות להלן, מצאו את התמונה (ללא הוכחה).  
 קבעו האם היא חח"ע? האם היא על? **הוכיחו** את קביעתכם במדויק.  
 בכל הסעיפים מוגדרת הקבוצה  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .  
 באחד הסעיפים כתוב ביטוי שכלל אינו מגדיר פונקציה. בסעיף זה יש להסביר מדוע זו אינה פונקציה.

- א.  $g : A \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g(x) = 2x + 1$ .  
 ב.  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f((x, y)) = 2x - y$ .  
 ג.  $h : P(A) \rightarrow \{1, 2\}$ ,  $h(X) = \begin{cases} 1 & \text{if } 1 \in X \\ 2 & \text{if } 2 \in X \end{cases}$ .  
 ד.  $\varphi : P(A) \rightarrow P(A)$ ,  $\varphi(X) = X \cap \{3, 4, 5, 6\}$ .  
 ה.  $F : P(A) \rightarrow P(A)$ ,  $F(X) = X \Delta A$  (רמז: תרגיל 3).

4. תהי  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  פונקציה. נגדיר פונקציה  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  כך:  $g(x) = f(x+1)$ .  
 הוכיחו שאם  $f$  חח"ע אז  $g$  אינה על.

5. תהיינה  $A, B$  קבוצות לא ריקות ו- $C, D$  קבוצות כלשהן, ותהיינה  $f : A \rightarrow C$ ,  $g : B \rightarrow D$  פונקציות כלשהן. נגדיר פונקציה  $h : A \times B \rightarrow C \times D$  על-ידי הכלל  $h((a, b)) = (f(a), g(b))$ .  
 הוכיחו ש- $h$  חח"ע ועל אם ורק אם  $f, g$  שתיהן חח"ע ועל.  
 (זו הוכחה ארוכה יחסית, כתבו אותה בזהירות: בכל שלב הבהירו מה אתם מניחים ומה אתם מוכיחים. שימו לב שאתם משתמשים בהנחה שהקבוצות אינן ריקות).