

מתמטיקה בדידה – תרגיל 5

הערה: תרגיל זה עוסק בפונקציות **מלאות** בלבד. בכל מקום בו נכתב "פונקציה" הכוונה היא ל"פונקציה מלאה". כרגיל, בפתרון ניתן להסתמך על טענות שהוכחו בשיעור/בתרגול/בשיעורי בית קודמים, אלא אם כן נכתב אחרת. אנא הקפידו על כתיבה מדויקת ובהירה.

1. בשאלה זו אין צורך בהוכחות:

- הצג פונקציה הפיכה מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$ והצג את הפונקציה ההופכית לה.
- הצג פונקציה f מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$ שהיא הפיכה מימין ולא הפיכה משמאל, והצג את פונקציה הופכית מימין עבור f .
- הצג פונקציה f מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$ שהיא הפיכה משמאל ולא הפיכה מימין, והצג שתי פונקציות (שונות) שהן הופכיות משמאל עבור f .

2. תהא f פונקציה מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$.

- נניח ש- f פונקציה לינארית לא קבועה. כלומר, קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a \neq 0$ וגם $f(x) = ax + b$ לכל $x \in \mathbb{R}$. הוכח ש- f הפיכה.
- נניח ש- f פונקציה קבועה. (אם המושג אינו מוכר, תוכל להיעזר ב-Wikipedia).
 - הצרן (כתוב בשפה לוגית פורמלית) במדויק את הטענה " f קבועה" (ללא שימוש במושג התמונה).
 - האם ייתכן ש- f הפיכה מימין? הוכח.
 - האם ייתכן ש- f הפיכה משמאל? הוכח.

3. תהיינה $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$. מצאו פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$, $h: B \rightarrow A$ עבורן מתקיים

$$g \circ f = i_A \text{ וגם } h \circ f = i_A \text{ וגם } h \neq g.$$

האם f היא הפונקציה ההופכית של g ? הסבר.

4. תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה ותהיינה $g: A \rightarrow A$, $h: B \rightarrow B$ פונקציות חח"ע ועל. הוכיחו ש- f היא הפיכה אם ורק

$$\text{אם } h \circ f \circ g \text{ היא הפיכה.}$$

5. תהיינה $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ פונקציות. הוכח או הפרך:

- אם $g \circ f$ על, אז g על.
- אם $g \circ f$ חח"ע, אז g חח"ע.
- אם $g \circ f$ חח"ע וגם f על, אז g חח"ע.

6. תהיינה $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ פונקציות. ידוע שלכל $x \in \mathbb{Z}$ מתקיים $g(f(x)) = 2x + 2$. אלו מהדברים הבאים נכון בהכרח?

(בכל סעיף – הוכיחו שהטענה מתקיימת, או תנו דוגמאות לפונקציות f, g מתאימות שעבורן הטענה אינה מתקיימת).

- f חח"ע.
- g חח"ע.
- f על.
- g על.