

מתמטיקה בדידה – תרגיל 10

כרגיל, שאלה 1 להגשה לפני השיעור ביום ב'.

1. נגדיר $A = \{1,2,3,4\}$. תן דוגמא ליחס על הקבוצה A שהוא:

 - א. רפלקסיבי וסימטרי אך לא טרנזיטיבי.
 - ב. סימטרי וטרנזיטיבי אך לא רפלקסיבי.
 - ג. טרנזיטיבי, רפלקסיבי, סימטרי ואנטי סימטרי.
 - ד. טרנזיטיבי, רפלקסיבי וסימטרי אך לא אנטי סימטרי.
 - ה. עבור היחס שהגדרת בסעיף הקודם חשב במפורט את ארבע מחלקות השקילות: $[1]_R, [2]_R, [3]_R, [4]_R$.
2. תהי A קבוצה ויהי R יחס על A . כתוב את הטענות הבאות בשפה לוגית פורמלית ללא שימוש בסימן $\neg$:

 - א. R יחס סימטרי.
 - ב. R יחס אנטי סימטרי.
 - ג. R אינו אנטי סימטרי.
 - ד. R אינו סימטרי.
 - ה. R אינו טרנזיטיבי.
3. לכל אחד מהיחסים הבאים בדוק האם הוא יחס רפלקסיבי, אי רפלקסיבי, סימטרי, אסימטרי, אנטי סימטרי, טרנזיטיבי. הוכח כל אחת מטענותיך במדויק (כתוב באופן מסודר את כל 18 ההוכחות/הפרכות).

 - א. יחס T על $\mathbb{Z}$ מוגדר ע"י $T = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a - b \text{ is even}\}$.
 - ב. יחס R על $P(\mathbb{N})$ מוגדר ע"י ARB אם $A \cap \mathbb{N}_{\text{Even}} = B \cap \mathbb{N}_{\text{Even}}$.
 - ג. שאלה מקורית:

יחס S על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ מוגדר ע"י $\forall a,b,c,d \in \mathbb{N}. (a,b)S(c,d) \Leftrightarrow ((a \leq c) \vee ((a = c) \wedge (b \leq d)))$

שאלה מתוקנת:

יחס S על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ מוגדר ע"י $\forall a,b,c,d \in \mathbb{N}. (a,b)S(c,d) \Leftrightarrow ((a < c) \vee ((a = c) \wedge (b \leq d)))$

ממי שכבר פתר את השאלה המקורית ולא רוצה לתקן, זה בסדר. השאלה המעניינת יותר לתרגול היא השאלה המתוקנת.
4. יחס R על הקבוצה $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ מוגדר ע"י $R = \{((a,b),(c,d)) \in (\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+) \times (\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+) \mid ad = bc\}$

 - א. הוכח ש- R הוא יחס שקילות.
 - ב. תן דוגמא לארבעה איברים שנמצאים במחלקת השקילות של $(1,2)$.
 - ג. הסבר מדוע כל מחלקות השקילות של יחס זה הן אינסופיות.
7. בונוס (העשרה בלבד – לא להגשה)

נגדיר פעולה (המסומנת ב- $+$) על מחלקות שקילות של R בשתי דרכים:

$$[(a,b)]_R + [(c,d)]_R = [(a+c, b+d)]_R$$

$$[(a,b)]_R + [(c,d)]_R = [(ad+bc, bd)]_R$$

הסבר והדגם מדוע ההגדרה הראשונה אינה טובה (כלומר: כלל לא ניתן להגדיר פעולה בצורה זו). הוכח שלא יכולה להיווצר בעיה מסוג זה בהגדרה השנייה, ועל כן זוהי הגדרה טובה.
5. עליך לבנות מחרוזת מהאותיות א,א,ב,ב,ג,ג,ג (מחרוזת באורך 9 – יש להשתמש בכל האותיות).

 - א. כמה מחרוזות ניתן לבנות?
 - ב. בכמה מתוכן אין אות שמופיעה שלוש פעמים ברציפות?