

מתמטיקה בדידה – תרגיל 11

כרגיל, שאלה 1 להגשה לפני השיעור ביום ב'.
הקפידו על הוכחות מדויקות, מפורטות ומסודרות.

1. תהא A קבוצת כל המחלקים הגדולים מ-1 של המספר 42. נתבונן ביחס החלוקה על קבוצה זו, המסומן $\mid_A$.
 - א. ציירו דיאגרמת הסה של $\mid_A$.
 - ב. כתבו במפורש יחס זה כקבוצה של זוגות.
 - ג. מצאו את האיברים המינימליים, המקסימליים.
 - ד. מצאו את המינימום ואת המקסימום (אם אין, הסבירו).
 - ה. האם $\mid_A$ הוא יחס סדר מלא על A ? מדוע?
 - ו. האם $\mid_A$ הוא יחס סדר חזק על A (strict partial order)? מדוע?
(לעיתים יחס סדר חזק נקרא גם יחס סדר ממש)
 - ז. מצא קבוצה אינסופית A שעבורה נקבל ש- $\mid_A$ הוא יחס סדר מלא.
2. תהי A קבוצה ויהי R יחס על A .
 - א. הוכח/הפוך: R הוא אסימטרי אם"ם הוא אנטי-רפלקסיבי וגם אנטי-סימטרי.
 - ב. הוכח שאם R הוא יחס סדר חזק אז R הוא אנטי-רפלקסיבי.
 - ג. נניח ש- S הוא יחס נוסף על A המקיים $S \subseteq R$. האם מהעובדה ש- R רפלקסיבי נובע שגם S רפלקסיבי? הוכח.
 - ד. נניח ש- S הוא יחס נוסף על A המקיים $R \subseteq S$. האם מהעובדה ש- R רפלקסיבי נובע שגם S רפלקסיבי? הוכח.
 - ה. נניח ש- R טרנזיטיבי ו- S הוא יחס טרנזיטיבי נוסף על A . האם $R \cap S$ טרנזיטיבי? הוכח.
3. תהיינה A, B קבוצות.

לכל פונקציה (מלאה) $f: A \rightarrow B$, R_f הוא יחס על A המוגדר ע"י: $R_f = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$.

 - א. הוכיחו ש- R_f יחס שקילות לכל פונקציה (מלאה) $f: A \rightarrow B$.
 - ב. ניקח $A = \{1, 2, 4\} \times \{1, 2, 4\}$, $B = \mathbb{N}$, ו- $f: A \rightarrow B$ מוגדרת ע"י $f((x, y)) = x + y$. מהי החלוקה שמושרית ע"י היחס R_f ?
 - ג. הוכיחו ש- f חח"ע אם ורק אם כל מחלקות השקילות של R_f הן סינגלטונים.
 - ד. (בנוסף) יהי S יחס שקילות על קבוצה A . הוכיחו שקיימת קבוצה B וקיימת פונקציה $f: A \rightarrow B$ כך ש- $S = R_f$.
4. יהי R יחס על קבוצה A . נגדיר יחס $S = \{(x, y) \in A \times A \mid \exists z \in A. xRz \wedge zRy\}$.

הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

 - א. $R \subseteq S$.
 - ב. אם R רפלקסיבי אז S רפלקסיבי.
 - ג. אם R סימטרי אז S סימטרי.
 - ד. אם R טרנזיטיבי אז S טרנזיטיבי.
5. תהא A הקבוצה $\{1, 2, 3\}$.
 - א. כמה יחסים על A קיימים?
 - ב. כמה מתוכם הם יחסים סימטריים?
 - ג. כמה מתוכם הם יחסי שקילות?