

מתמטיקה בדידה – תרגיל 12

כרגיל, שאלה 1 להגשה לפני השיעור ביום ב'.

1. תהי $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ויהי R יחס סדר חזק על A המוגדר כך:
 $R = \{(6, 4), (1, 5), (4, 5), (1, 3), (4, 3), (2, 4), (2, 5), (5, 3), (6, 3), (2, 3), (6, 5)\}$
 - א. מצאו שתי שרשראות בגודל 4.
 - ב. מצאו 6 שרשראות בגודל 3 ש-3 שייך אליהן.
 - ג. מצאו את כל האנטי-שרשראות בגודל 2.
 - ד. מצאו יחס סדר חזק מלא על A המכיל את R (כלומר: מיון טופולוגי של R).

בכל אחד מהסעיפים א-ג, מספיק לכתוב הסבר לגבי שרשרת/אנטי-שרשרת אחת.
הערה: לפני שמתחילים בכלל, בדקו שאתם יודעים מהי ההגדרה המדויקת של שרשרת ואנטי-שרשרת.
(בפרט, זכרו ששרשרת היא קבוצה, ולא רשימה של איברים מחוברים בקווים).
2. הוכח/הפוך: לכל יחס חזק R על קבוצה A , אם יש ל- R איבר מינמלי יחיד אז יש ל- R מינימום.
3. מצא את כל היחסים על הקבוצה $\{1, 2, 3, 4\}$ (אין קשר בין הסעיפים):
 - א. שהסגור הטרנזיטיבי שלהם הוא היחס $\{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$.
 - ב. שהם יחסי סדר חלש בו 1 הוא מקסימום ו-4 הוא מינימום.
 - ג. שהם יחסי סדר חלש בו 1 הוא מקסימום ויש אנטי-שרשרת בגודל 3.
4. בהינתן יחס R יחס על קבוצה A , R^{-1} גם הוא יחס על A המוגדר ע"י $R^{-1} = \{(a, b) \in A \times A \mid (b, a) \in R\}$.
 - א. הוכח: אם R יחס סדר חלש אז גם R^{-1} יחס סדר חלש.
 - ב. הוכח: אם R סימטרי אז $R = R^{-1}$.
 - ג. הסגור הסימטרי של יחס R הוא היחס המתקבל ע"י איחודם R ו- R^{-1} .
 - ד. הוכח/הפוך: הסגור הסימטרי של הסגור הטרנזיטיבי של יחס R תמיד שווה לסגור הטרנזיטיבי של הסגור הסימטרי של R .
5. [אפשר לנסות להתמודד לבד, אך השיעור ביום שני (14 בינואר) יסייע מאוד].

שישה אחים מפונקים יצאו לטיול. אביהם צייד אותם בשקית ובה תפוח, אגס, גויאבה, תפוז, אננס ותות. לכל ילד יש רשימת פירות אותם (ורק אותם) הוא מוכן לאכול:

ירון - תות, גויאבה, תפוז.
רון - תות, תפוז.
ניר - תפוח, אגס, תפוז, אננס.
שניר - אגס, תות, אננס.
שיר - תפוז, גויאבה.
שי - גויאבה, תות.

 - א. האם ניתן לחלק את הפירות כך שכל ילד יקבל פרי אותו הוא מוכן לאכול? הוכיחו.
 - ב. האב החליט "לחנך" את הילדים ולהכריח אותם לאכול פרי שאינם אוהבים. האם ניתן לחלק את הפירות כך שכל ילד יקבל פרי אותו הוא לא מוכן לאכול? הוכיחו.
6. תהא A קבוצה של 513 פסוקים הבנויים מהאטומים P, Q, R ומהקשרים שלמדנו $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge$.
הוכח ש- A מכילה לפחות שלושה פסוקים שונים שהם שקולים לוגית.