אוטומטים ושפות פורמליות
מבחן סופי - פתרונות

מרצה: ד"ר יואב רודה

משך המבחן: 3 שעות
ללא חומר עזר.
ענו על 3 מתוך 4 השאלות, ונמקו היטב אך בקצרה את תשובותיכם.

1. נתונה השפה L המכילה את כל המילים שמכילות את תת המילה bbb או את תת המילה aaa.

   למשל המילים הבאות יהיו בשפה:

$$bbbaaab, babbbabbaab, aaa, bbb, aaaaa$$

   ואלו לא יהיו:

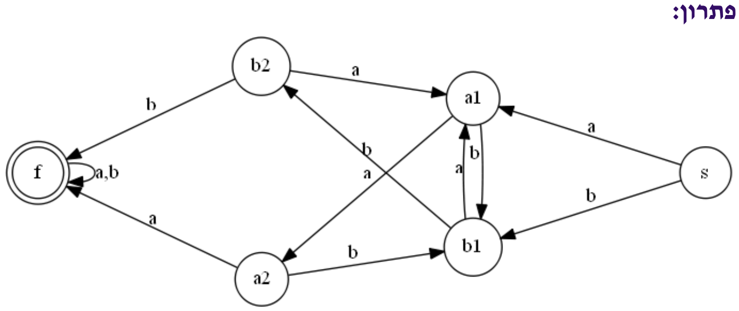
$$ababba, aabababb, b, aa$$

   (א) (17 נק') תארו ביטוי רגולרי שמתאים לשפה זאת.

   פתרון: $\Sigma^\star(aaa \cup bbb)\Sigma^\star$

   (ב) (17 נק') תארו DFA, אוטומט סופי דטרמיניסטי, המקבל את השפה הזאת.

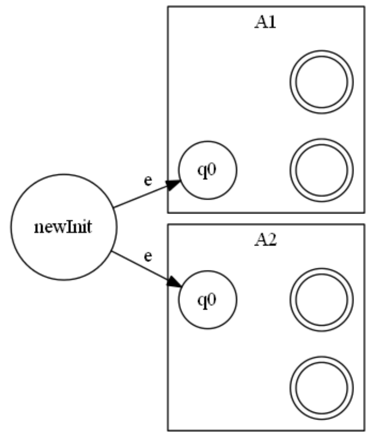
   פתרון:



2. בכל סעיף עליכם להראות ששפות רגולריות סגורות תחת הפעולה הנתונה.

   (א) (9 נק') איחוד. סגירות תחת איחוד אומרת שאם L_1 ו־ L_2 הן רגולריות, אז גם שהשפה $L_1 \cup L_2$ היא רגולרית.

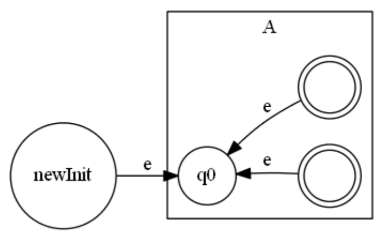
   פתרון: כיון ש־L_1 רגולרית יש לה אוטומט כלשהו A_1. בדומה, ל־L_2 יש אוטומט A_2. נבנה את האוטומט הבא:



והוא יקבל את שפת האיחוד, ולכן היא רגולרית.

(ב) (9 נק') כוכב קלין. פה סגירות תאמר שאם L רגולרית, אז כך גם $L^\star$.

פתרון: כיון ש־L רגולרית יש לה אוטומט כלשהו A. נבנה את האוטומט הבא:



והוא יקבל את $L^\star$, ולכן היא רגולרית.

(ג) (8 נק') משלים.

פתרון: כיון ש־L רגולרית, אז יש לה אוטומט דטרמניסטי (וזה חשוב פה). ניקח אותו ונהפוך בו את כל המצבים המקבלים ללא מקבלים ולהיפך. האוטומט החדש יקבל את שפת המשלים של השפה L.

(ד) (8 נק') פעולה חדשה $\odot$. לשתי שפות L_1, L_2, נגדיר:

$$L_1 \odot L_2 = \{w \in L_1 \ \mid w = xy, x \in \Sigma^\star, y \in L_2\}$$

כלומר, זוהי שפת המילים שנמצאות ב L_1 ויש להן סיפא שנמצאת ב־L_2.

למשל, אם

$$L_1 = (ab \cup b)^\star, L_2 = aaa \cup bbb$$

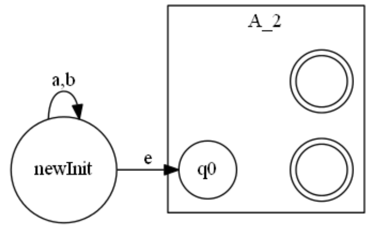
אז

$$L_1 \odot L_2 = (ab \cup b)^\star bbb$$

פתרון: נשים לב:

$$L_1 \odot L_2 = L_1 \cap \Sigma^\star L_2$$

כיון ש־L_1 רגולרית יש לה אוטומט כלשהו A_1. בדומה, ל־L_2 יש אוטומט A_2. נקח קודם את A_2 ונהפוך אותו לאוטומט הבא A'_2:



אוטומט זה מקבל את השפה $\Sigma^\star L_2$. עכשיו רק צריך לעשות את החיתוך. אפשר בעזרת אוטומט מכפלה או בעזרת הפעלה של משלים ואיחוד (אבל פה חשוב להשתמש גם בדטרמיניזציה באמצע). אני לא נכנס לפרטים, למדנו את זה בשיעור.

3. (34 נק')

נתונה השפה:

$$L = \left\{ c^n a^j b^k \ \mid 1 \leq n \leq 2,\ j < k \right\}$$

הראו שהיא לא רגולרית בעזרת למת הניפוח.

פתרון: נטען ששפה זו אינה רגולרית.

(א) נניח בשלילה שהיא כן רגולרית.

(ב) לכן לפי למת הניפוח יש לה איזשהו קבוע N.

(ג) ניקח את המילה: $w = ca^N b^{N+1} \in L$. מילה זו שייכת ל־L ואורכה גדול מ־N לכן הלמה תופסת לגביה.

יש כמה אפשרויות לתת מילה y בתוך N האותיות הראשונות:

i. היא מכילה את ה־c. אז ניקח $t = 0$ ונקבל מילה שאינה מכילה אף c ולכן אינה בשפה.

ii. היא מכילה רק a. אז ניקח $t = 2$ ונקבל בהכרח מילה בה מספר ה־a גדול שווה למספר ה־b ולכן אינה בשפה.

זאת אומרת, הראנו שכל תת־מילה תוך N האותיות הראשונות אינה ניתנת לניפוח. בסתירה ללמת הניפוח שטוענת שאילו L היתה רגולרית, אז ל־w היתה תת־מילה כזו שכן ניתנת לניפוח (כל ה־t היו משאירים אותה בשפה).

4. נתון הדקדוק הבא, הנתון בצורת חומסקי נורמלית:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & AB|BC \\ A & \to & a|AB \\ B & \to & b|BC \\ C & \to & c \end{array}$$

(א) (26 נק') הדגימו את ריצת האלגוריתם לבדיקת שייכות בדקדוק, כאשר הקלט הוא המילה $abcbcc$.

פתרון:

i,j	1	2	3	4	5	6
1	A	S,A	S,A	S,A	S,A	S,A
2		B	B,S	$-$	$-$	$-$
3			C	$-$	$-$	$-$
4				B	B,S	B,S
5					C	$-$
6						C

וכיון ש־S מופיע בפינה $(1,6)$, המילה נמצאת בשפה.

(ב) (8 נק') השתמשו בטבלא שיצרתם והסיקו אילו מתת המילים של המילה הנתונה $abcbcc$ שייכות לשפה הנוצרת ע"י הדקדוק.

פתרון: כל מקום בו מופיע S מתאים לתת מילה שאפשר ליצור אותה. ולכן תת המילים המדוברות הן:

$$ab, abc, abcb, abcbc, abcbcc, bc, bcc$$