

אוטומטים ושפות פורמליות

מבחן סופי - פתרונות

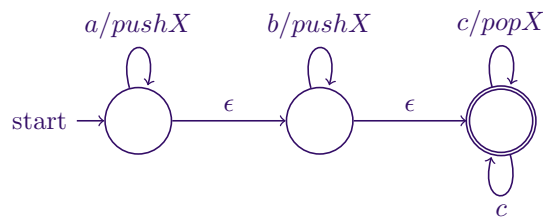
מרצה: ד"ר יואב רודה

משך המבחן: 3 שעות
 ללא חומר עזר.
 ענו על 3 מתוך 4 השאלות, ונמקו היטב אך בקצרה את תשובותיכם.

1. נתונה השפה הבאה:

$$L = \{a^n b^k c^m \mid n + k \leq m\}$$

(א) (17 נק') תכננו אוטומט מחסנית המקבל שפה זו.



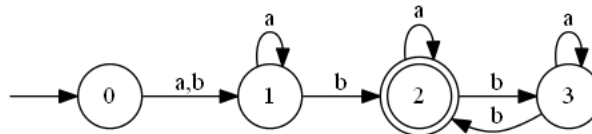
פתרון:

(ב) (17 נק') כתבו דקדוק חסר הקשר לשפה זו.

פתרון:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSc|Sc|X \\ X &\rightarrow bXc|\epsilon \end{aligned}$$

2. נתון האוטומט הבא:



בשיעור הראנו דרך בה ניתן לתרגם כל אוטומט לביטוי רגולרי כך שהשפה שמתאר הביטוי היא אותה שפה שהאוטומט מקבל.

לשם כך הגדרנו: $R(i, j, k)$ בתור קבוצת המילים שמביאה את האוטומט ממצב i למצב j כאשר כל מצבי האמצע במסלול הם מתוך $\{0..k\}$. הראנו גם את הכלל הרקורסיבי למציאת ביטוי רגולרי לתיאור $R(i, j, k)$:

$$R(i, j, k) = R(i, j, k-1) \cup R(i, k, k-1)R(k, k, k-1)^*R(k, j, k-1)$$

(א) (8 נק') תארו את כל ה $R(i, j, -1)$.

פתרון:

	0	1	2	3
0	ϵ	$a \cup b$		
1		$a \cup \epsilon$	b	
2			$a \cup \epsilon$	b
3			b	$a \cup \epsilon$

(ב) (6 נק') מהו $R(0, 2, 1)$? כתבו את התשובה לפי ההגדרה ולא ע"י הפעלת הכלל הרקורסיבי.

פתרון:

$$R(0, 2, 1) = (a \cup b)a^*b$$

(ג) (20 נק') חשבו את $R(0, 2, 1)$ בעזרת הכלל הרקורסיבי והתוצאות מסעיף א'. שימו לב ששימוש בכלל הרקורסיבי יתן לכם ביטויי מהצורה $R(\cdot, \cdot, 0)$ ועל כל אחד מהם תצטרכו להפעיל את הכלל הרקורסיבי שוב פעם כדי לקבל את הביטויים בסעיף א'.

פתרון:

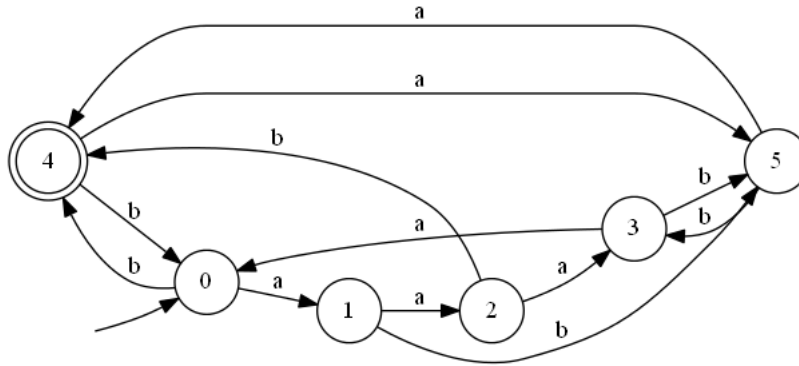
$$\begin{aligned}
 R(0, 2, 1) &= R(0, 2, 0) \cup R(0, 1, 0)R(1, 1, 0)^*R(1, 2, 0) \\
 R(0, 2, 0) &= R(0, 2, -1) \cup R(0, 0, -1)R(0, 0, -1)^*R(0, 2, -1) \\
 &= \emptyset \cup \epsilon(\epsilon)^*\emptyset \\
 &= \emptyset \\
 R(0, 1, 0) &= R(0, 1, -1) \cup R(0, 0, -1)R(0, 0, -1)^*R(0, 1, -1) \\
 &= (a \cup b) \cup \epsilon(\epsilon)^*(a \cup b) \\
 &= a \cup b \\
 R(1, 1, 0) &= R(1, 1, -1) \cup R(1, 0, -1)R(0, 0, -1)^*R(0, 1, -1) \\
 &= (a \cup \epsilon) \cup \emptyset(\epsilon)^*(a \cup b) \\
 &= a \cup \epsilon \\
 R(1, 2, 0) &= R(1, 2, -1) \cup R(1, 0, -1)R(0, 0, -1)^*R(0, 2, -1) \\
 &= b \cup \emptyset(\epsilon)^*\emptyset \\
 &= b
 \end{aligned}$$

ולכן סך הכל:

$$\begin{aligned}
 R(0, 2, 1) &= R(0, 2, 0) \cup R(0, 1, 0)R(1, 1, 0)^*R(1, 2, 0) \\
 &= \emptyset \cup (a \cup b)(a \cup \epsilon)^*b \\
 &= (a \cup b)a^*b
 \end{aligned}$$

3. צמצום אוטומטים דטרמניסטיים.

(א) (18 נק') הדגימו את ריצת האלגוריתם לצמצום אוטומטים על האוטומט הבא:



פתרון: בשלבים:

i.

$$A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$$

$$B = \{4\}$$

נבנה את הטבלא של A:

	a	b
0	A	B
1	A	A
2	A	B
3	A	A
5	B	A

ואז קיבלנו:

ii.

$$A = \{0, 2\}$$

$$B = \{4\}$$

$$C = \{1, 3\}$$

$$D = \{5\}$$

נבנה את הטבלא של A:

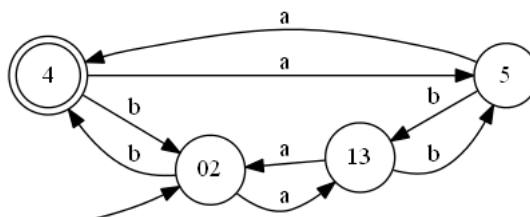
	a	b
0	C	B
2	C	B

נבנה את הטבלא של C:

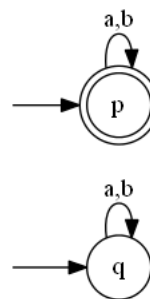
	a	b
1	A	D
3	A	D

כלומר אין פיצולים ואלו הקבוצות הסופיות.

מכאן שהאוטומט הסופי הוא:



(ב) (4 נק') תארו את כל האוטומטים הדטרמיניסטיים האפשריים שמכילים מצב אחד בלבד, ולהם הא"ב $\{a, b\}$.
פתרון: יש שניים כאלה:

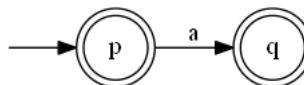


(ג) (6 נק') מתי האלגוריתם שלנו יצמצם את האוטומט כל כך שהוא יהפוך לאוטומט בעל מצב אחד בלבד? תנו תנאי בדיקה פשוט לאוטומט המקורי שיאמר מתי זה יקרה.

פתרון: כאשר כל המצבים הנגישים מהמצב ההתחלתי הם מקבלים או שכולם אינם מקבלים.

(ד) (6 נק') האם התנאי שמצאתם נכון גם עבור אוטומטים לא דטרמיניסטיים? אם כן הסבירו מדוע, ואם לא תנו דוגמה נגדית.

פתרון: התנאי לא נכון כי באוטומטים לא דטרמיניסטיים אין חובה של קשת לכל אות מכל מצב. האוטומט הבא למשל, לא שקול לאף אחד מהאוטומטים שהזכרנו.



4. נתון הדקדוק הבא:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSbb|A \\ A &\rightarrow cA|d \end{aligned}$$

(א) (10 נק') מהי השפה שהדקדוק נותן?

פתרון:

$$L = \{a^n c^k db^{2n} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$$

(ב) (14 נק') מהי קבוצת התבניות הפסוקיות של הדקדוק?

פתרון:

$$T(G) = \{a^n Sb^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n c^k (A \cup d)b^{2n} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$$

(ג) (10 נק') נסמן את הקבוצה שמצאתם בסעיף ב' ב- X . הוכיחו בצורה פורמלית

ש:

$$X \subseteq T(G)$$

כלומר הראו שכל תבנית שכתבתם בקבוצה X , אכן ניתן להגיע אליה בעזרת גזירות כאשר מתחילים ב- S .

פתרון: למה 1: לכל n ,

$$S \xRightarrow{*} a^n Sb^{2n}$$

הוכחה: באינדוקציה על n . ל- $n = 0$ זה ברור. נניח ל- n ונוכיח ל- $n + 1$:

$$S \xRightarrow{*} a^n Sb^{2n} \Rightarrow a^n aSbbb^{2n} = a^{n+1} Sb^{2n+2}$$

כאשר המעבר הראשון הוא מהנחת האינדוקציה והשני מגזירה בודדת. מ.ש.ל. מהלמה נובע בעזרת גזירה נוספת שלכל n :

$$S \xRightarrow{*} a^n Ab^{2n}$$

ועכשיו נטען עוד למה אינדוקטיבית: **למה 2:** לכל n, k ,

$$S \xRightarrow{*} a^n c^k Ab^{2n}$$

הוכחה: באינדוקציה על k . ל- $k = 0$ זה בדיוק מה שראינו קודם. נניח ל- k ונוכיח ל- $k + 1$:

$$S \xRightarrow{*} a^n c^k Ab^{2n} \Rightarrow a^n c^k Ab^{2n} = a^n c^{k+1} Ab^{2n}$$

כאשר המעבר הראשון הוא מהנחת האינדוקציה והשני מגזירה בודדת. מ.ש.ל. עכשיו בעזרת גזירה אחרונה נגיע לקבוצה האחרונה שעוד לא כיסינו. לכל n, k , נקבל:

$$S \xRightarrow{*} a^n c^k db^{2n}$$

וסיימנו.