# Dedução Natural para a Lógica de Predicados

## Matemática Discreta I

Rodrigo Ribeiro

Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas
Universidade de Federal de Ouro Preto

14 de dezembro de 2012

# Lógica de Predicados — (I)

## Dedução Natural e Álgebra

- Assim como a lógica proposicional, na lógica de predicados podemos usar dedução natural e raciocínio algébrico.
- Ambos os sistemas são extensões da lógica proposicional, acrescentando regras para lidar com quantificadores.

# Dedução Natural — (I)

## Regras para o Quantificador Universal

- Introdução

$$\frac{F(x) \quad x \text{ arbitrário}}{\forall x.F(x)} \; (\forall I)$$

- Eliminação

$$\frac{\forall x.F(x)}{F(p)} \; (\forall E)$$

# Dedução Natural — (II)

## Introdução do Quantificador Universal

- Primeiramente, vamos entender a regra $(\forall I)$:

$$\frac{F(x) \quad x \text{ arbitrário}}{\forall x.F(x)} \; (\forall I)$$

- Pela regra $(\forall I)$, podemos concluir $\forall x.F(x)$, se conseguirmos provar $F(x)$, considerando que $x$ seja um valor arbitrário pertencente ao universo de discurso.

# Dedução Natural — (III)

## O que quer dizer um valor arbitrário?

- Podemos considerar como um valor arbitrário em uma prova, um valor para o qual não fazemos nenhuma suposição.
- Se provarmos que alguma propriedade é verdadeira para algum valor arbitrário de um universo de discurso qualquer, temos que esta propriedade é verdadeira para todo elemento deste universo.

# Dedução Natural — (IV)

## Um exemplo...

- Universo de discurso: conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.
- Predicado: $par(x)$ — O número natural $x$ é par.
- Propriedade: $\forall x.par(x) \rightarrow par(x) \vee \neg par(x)$

# Dedução Natural — (V)

## A demonstração...

- **Teorema 1.**
  $\vdash \ \forall x.par(x) \rightarrow par(x) \vee \neg par(x)$

  **Prova:**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{par(n)^1}{par(n) \vee \neg par(n)}\ (\vee\ I_E)}{par(n) \rightarrow par(n) \vee \neg par(n)}\ (\rightarrow\ I)^1}{\forall x.par(x) \rightarrow par(x) \vee \neg par(x)}\ (\forall\ I)$$

# Dedução Natural — (VI)

## Onde está o valor arbitrário?

- Veja que na demonstração anterior, a prova usou uma variável $n$ sobre a qual não foi feita nenhuma suposição.
- Esta variável é simplesmente uma variável nova, não utilizada na prova.
- Como nenhuma suposição foi feita sobre $n$, podemos concluir que $par(n) \rightarrow par(n) \vee \neg par(n)$ é válido para qualquer valor $x \in \mathbb{N}$.

# Dedução Natural — (VII)

## Uma tentativa de prova incorreta...

- Considere a seguinte árvore de prova:

$$\frac{par(2)}{\forall x.par(x)}\ (\forall I)$$

- Suponha que sejamos capazes de provar $par(2)$. A partir deste fato, não podemos concluir que $\forall x.par(x)$ (isto é, que todo $x \in \mathbb{N}$ é par), porque o valor 2 não é arbitrário e por isto não podemos utilizar $(\forall I)$.

# Dedução Natural — (VIII)

## Eliminação do Quantificador Universal

- A regra de eliminação do $\forall$ é mais simples:

$$\frac{\forall x.F(x)}{F(p)}\ (\forall E)$$

- Esta regra nos diz que se $\forall x.F(x)$ é verdade, então $F(p)$ também o é, onde $p$ é um elemento qualquer pertencente ao universo de discurso.

## Exemplo

**Teorema 2.**

$$\forall x. f(x) \rightarrow g(x), \forall x. g(x) \rightarrow h(x) \vdash \forall x. f(x) \rightarrow h(x)$$

**Prova:**

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{f(n)^1 \qquad \cfrac{\forall x. f(x) \rightarrow g(x)}{f(n) \rightarrow g(n)}\,(\forall E)}{g(n)}\,(\rightarrow E) \qquad \cfrac{\forall x. g(x) \rightarrow h(x)}{g(n) \rightarrow h(n)}\,(\forall E)}{h(n)}\,(\rightarrow E)}{f(n) \rightarrow h(n)}\,(\rightarrow I)^1}{\forall x. f(x) \rightarrow h(x)}\,(\forall I)$$

# Dedução Natural — (X)

## Regras para o Quantificador Existencial

- Introdução

$$\frac{F(p)}{\exists x.F(x)}\ (\exists\, I)$$

- Eliminação

$$\frac{\exists x.F(x) \quad F(p) \vdash C \quad \{p \text{ arbitrário}\}}{C}\ (\exists\, E)$$

# Dedução Natural — (XI)

## Introdução do Quantificador Existencial

- A regra de introdução do quantificador existencial:

$$\frac{F(p)}{\exists x.F(x)}\ (\exists I)$$

- Esta regra diz que se sabemos que $F(p)$ é verdadeiro para algum elemento $p$ do universo de discurso, então podemos concluir que $\exists x.F(x)$.

# Dedução Natural — (XII)

## Exemplo

- **Teorema 3.** $\forall x.f(x) \vdash \exists x.f(x)$

  **Prova:**

$$\dfrac{\dfrac{\forall x.f(x)}{f(a)}\ (\forall E)}{\exists x.f(x)}\ (\exists I)$$

# Dedução Natural — (XIII)

## Eliminação do Quantificador Existencial

- A regra de eliminação do quantificador existencial:

$$\frac{\exists x.F(x) \quad F(p) \vdash C \quad \{p \text{ arbitrário}\}}{C}\ (\exists\, E)$$

- Esta regra diz que se sabemos que $\exists x.F(x)$ e conseguimos provar $C$ usando, como suposição $F(p)$, com $p$ arbitrário, então podemos aplicar $(\exists E)$ e concluir $C$.

# Dedução Natural — (XIV)

## Exemplo

**Teorema 3.** $\exists x.p(x), \forall x.p(x) \rightarrow q(x) \vdash \exists x.q(x)$

**Prova:**

$$
\dfrac{\exists x.p(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x.p(x) \rightarrow q(x)}{p(a) \rightarrow q(a)}\,(\forall E) \qquad \dfrac{\dfrac{p(z)^1}{\forall x.p(x)}\,(\forall I)}{p(a)}\,(\forall E)}{q(a)}\,(\rightarrow E)}{\exists x.q(x)}\,(\exists I)}{\exists x.q(x)}\,(\exists E)^1
$$

# Dedução Natural — (XV)

## Dedução Natural

- Com as 4 regras apresentadas e todas as regras já vistas para a lógica proposicional, podemos provar sequentes da lógica de predicados!

# Dedução Natural — (XVI)

## Exercícios

1. $\forall x.F(x) \wedge G(x) \vdash \forall x.F(x) \rightarrow G(x)$
2. $\forall x.\forall y.F(y) \rightarrow G(x) \vdash \exists y.F(y) \rightarrow \forall x.G(x)$
3. $\forall x.F(a, x, x), \forall x.\forall y.\forall z.F(x, y, z) \rightarrow F(f(x), y, f(z)) \vdash F(f(a), a, f(a))$