Contagem e Combinatória Elementar

Matemática Discreta I

Rodrigo Ribeiro

Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas
Universidade de Federal de Ouro Preto

11 de janeiro de 2013

Motivação — (I)

Combinatória

- Ramo da matemática que preocupa-se em determinar quantos elementos um determinado conjunto possui.
- Possuem diversas aplicações em computação:
  - Quanto de espaço um banco de dados usa?
  - Quantas operações são realizadas por um algoritmo?

Contagem — (I)

Princípio da Multiplicação

- Se existem n_1 resultados possíveis para um primeiro evento e_1 e n_2 para um segundo evento e_2, então existem $n_1.n_2$ resultados possíveis para a sequência de e_1 e e_2.

Contagem — (II)

Exemplo

- A última parte de um número de telefone possui 4 dígitos. Quantos destes números de 4 dígitos existem?

  Solução: Podemos considerar uma sequência de 4 eventos. Onde cada evento é a escolha de um dígito. Sendo assim, o primeiro dígito possui 10 possibilidades, assim como o segundo, o terceiro e o quarto. Portanto, aplicando o princípio da multiplicação teremos $10.10.10.10 = 10^4$ números distintos.

Contagem — (III)

Exercícios

- Quantos números de 4 dígitos existem se um mesmo dígito não pode ser repetido?
- Se um homem possui 4 ternos, 5 gravatas e 8 camisas, de quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?
- Quantas sequências de bytes começam com o bit 0 e terminam com o bit 1?

Contagem — (IV)

Princípio da Adição

- Se A e B são eventos disjuntos com n_1 e n_2 resultados possíveis, respectivamente, então o número total de possibilidades para o evento A ou B é $n_1 + n_2$.

Contagem — (V)

Exemplo

- Um consumidor deseja comprar um veículo de uma concessionária. A concessionária tem 23 automóveis e 14 caminhões em estoque. Quantas escolhas possíveis o consumidor tem?

  Solução: Como o consumidor pode escolher entre automóveis ou caminhões, ele possui um total de $23 + 14 = 37$ possibilidades.

Contagem — (VI)

Usando os dois princípios juntos

- Quantos números de quatro dígitos começam com o dígito 4 ou 5?

  Solução: Para números que começam com 4, temos para o primeiro dígito somente uma possibilidade e para os outros 3, 10 possibilidades. Portanto, temos $1.10.10.10 = 1000$. Para números que começam com 5, o racicínio é idêntico. Portanto temos 2000 números de 4 dígitos que começam com 4 ou 5.

Contagem — (VII)

Exercícios

- Quantos números de 3 dígitos são pares?
- Uma mulher possui 4 camisetas, 5 saias, 3 bermudas e 6 vestidos. De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir?
- Quantos palíndromos de 6 letras são possíveis na língua portuguesa?
- Quantos números de 3 dígitos são divisíveis por 5?

Contagem — (VIII)

Contando Elementos de Conjuntos

- Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, como contar a quantidade de elementos de $A \cap B$ e $A \cup B$?
  - Se A e B são disjuntos, temos que $|A \cup B| = |A| + |B|$ e $|A \cap B| = 0$.
- Mas e se A e B não são disjuntos...
  - Se fizermos $|A \cup B| = |A| + |B|$, estaremos contando os elementos de $A \cap B$ duas vezes...
  - Portanto temos que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$!

Contagem — (IX)

Exemplo

- Suponha que estudantes de uma república desejam pedir pizza. 5 estudantes gostam de calabresa, 3 gostam de mussarela. Sabendo que a república possui 7 estudantes, quantos gostam de calabresa e mussarela?
- **Solução:** Basta aplicar a equação anterior. Apenas um estudante gosta de calabresa e mussarela.

Contagem — (X)

Mas só para $A \cup B$?

- Não. O que foi aplicado no exemplo anterior é chamado de princípio da inclusão/exclusão.
- E pode ser generalizado para a união de n conjuntos.
- Para três conjuntos temos: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Contagem — (XI)

Princípio da Inclusão / Exclusão

Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos finitos com $n \geq 2$, temos que:
$|A_1 + ... + A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} A_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i \cap A_j + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ... + (-1)^{n+1} |A_1 \cap ... \cap A_n|$

Contagem — (XII)

Princípio da Inclusão / Exclusão para $|A \cup B \cup C \cup D|$

$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C \cup D| = \; & |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| \\
- \; & |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| \\
- \; & |B \cap D| + |A \cap B \cap C| \\
+ \; & |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| \\
+ \; & |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|
\end{aligned}
$$

Contagem — (XIII)

O Princípio das Casas de Pombos

- Se mais de k itens são colocados em k caixas, então alguma caixa terá mais de um item.

Mas isto é óbvio...

- Sim! E muito útil para provarmos que dois objetos de um conjunto possuem uma determinada propriedade.

Contagem — (XIII)

Um exemplo...

- Se uma urna contém 4 bolas vermelhas, 7 verdes, 9 azuis e 6 amarelas, qual o menor número de bolas que devemos retirar para termos certeza de que teremos retirado três bolas de mesma cor?
  - Caixas: as 4 cores.
  - Itens: as bolas a serem retiradas.
  - Solução: $4.2 + 1 = 9$.

Contagem — (XIV)

Exercícios

- Quantas cartas devemos retirar de um baralho para se obter duas cartas do mesmo naipe?
- Quantas cartas devemos retirar de um baralho para se obter duas cartas do mesmo valor?

Combinatória Básica — (I)

Arranjos

- Como escolher r objetos de um conjunto contendo n destes objetos de maneira que a ordem de escolha destes r objetos é importante?
- **Atenção**: Alguns livros chamam arranjos de permutações...
- Basta usar a fórmula: $A(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Combinatória Básica — (II)

Permutações

- Arranjo em que são escolhidos todos os n elementos do conjunto.
- $P_n = A(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$

Combinatória Básica — (III)

Exercícios

- De quantas maneiras podemos selecionar um presidente e um vice-presidente de um grupo de 15 pessoas?
- De quantas maneiras 7 pessoas podem se sentar em uma fileira de 7 cadeiras?

Combinatória Básica — (IV)

Combinações

- Como escolher r objetos de um conjunto contendo n destes objetos de maneira que a ordem de escolha destes r objetos **não** é importante?
- Basta usar a fórmula: $C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Combinatória Básica — (VI)

Exercícios

- Quantas mãos de 5 cartas podem ser obtidas a partir de um baralho?
- De um conjunto de 50 corredores, haverá uma premiação para os 3 primeiros colocados. De quantas maneiras estes prêmios podem ser distribuídos?

Combinatória Básica — (VII)

Exemplos

- Quantas permutações podemos fazer com a palavra floresta? Resp. 8!.
- Quantas permutações podemos fazer com a palavra arara?
  - Cuidado... Pois a resposta não é 5!. Pois, não há diferença entre $a_1 r a_2 r a$ e $a_2 r a_1 r a$.
  - Neste exemplo teremos 3! permutações repetidas, devido às permutações da letra a e 2! permutações repetidas pela letra r. O que temos que fazer é dividir o total de permutações pela possibilidades de se permutar elementos iguais. Resp. $\frac{5!}{3!.2!} = 10$

Combinatória Básica — (VIII)

Eliminando Duplicatas

- Suponha que temos um conjunto com n objetos dos quais n_1 objetos são indistinguíveis entre si, n_2 são indistinguíveis entre si e assim por diante. O número de permutações distintas destes n objetos é: $\frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$.

Combinatória Básica — (IX)

Arranjo com Repetições

- Consequência do Princípio da Multiplicação.
- Se desejamos calcular o n^o de arranjos de r elementos a partir de n elementos, onde repetições são permitidas, basta utilizar: n^r.

Combinatória Básica — (X)

Combinações com Repetições

- Combinação com repetição de r objetos escolhidos entre n objetos distintos é:

$$
\begin{aligned}
C(r+n-1, r) &= \frac{(r+n-1)!}{r!(r+n-1-r)!} \\
&= \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}
\end{aligned}
$$

Combinatória Básica — (XI)

Exercícios

- Um grupo de 7 amigos escolheram uma bebida dentre um conjunto de 4 bebidas disponíveis. De quantas maneiras tal escolha pode ser feita?