

Técnicas para Demonstração de Teoremas — Parte I

Matemática Discreta I

Rodrigo Ribeiro

Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas
Universidade Federal de Ouro Preto

26 de janeiro de 2013

Porquê aprender demonstração?

- Ajuda a desenvolver a habilidade de não somente criar demonstrações, mas sobretudo entendê-las.
- O conhecimento em criar demonstrações manualmente é fundamental para a compreensão de como utilizar ferramentas computacionais para prova de teoremas.

Técnicas para demonstração

- Para demonstrar teoremas, devemos expressar o que desejamos provar usando lógica de predicados e baseado na sintaxe desta fórmula desenvolvemos a demonstração.

Algumas Definições...

- Um teorema é formado pelos seguintes componentes: Hipóteses e Conclusão.
 - Teoremas são sentenças que descrevem alguma propriedade matemática.
 - Tais sentenças podem ser verdadeiras ou falsas.
 - Para mostrar que um teorema é verdadeiro devemos prová-lo.
 - Para mostrar que um teorema é falso devemos encontrar um contra-exemplo.

Demonstração de Teoremas — (II)

Teorema

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$.

- Este exemplo mostra um simples teorema expresso em termos das variáveis a, b .
- Para prová-lo devemos mostrar que se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$, para quaisquer valores de a, b .
- Este teorema possui como hipótese $a, b \in \mathbb{R}$
- Como conclusão: Se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$.

Demonstração de Teoremas — (III)

Conceito de Instância

Considere ainda o teorema anterior...

- Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$.
- Uma instâncias de um teorema é obtida substituindo variáveis por valores no enunciado do teorema.
- Ex: Se $0 < 5 < 7$ então $25 < 49$, para $a = 5, b = 7$.
- **Atenção:** Mostrar que uma instância é verdadeira não constitui uma prova!

Exercício

Suponha $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x > 3$ e $y < 2$. Então $x^2 - 2y > 5$.

- Quais são as hipóteses e a conclusão deste teorema?
- Apresente algumas instâncias deste teorema. Estas são verdadeiras?

Teorema

Suponha $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x > 3$. Então $x^2 - 2y > 5$.

- Contra-exemplos são utilizados para mostrar que um teorema é falso.
- Um contra-exemplo para o teorema anterior é $x = 4, y = 6$, pois com isso temos $x^2 - 2y = 16 - 12 = 4 \not> 5$.

Demonstração de Teoremas — (VI)

Para não esquecer...

- Para afirmar que um teorema é verdadeiro, devemos construir uma prova. Somente assim garantimos que este é verdadeiro para todas as suas instâncias.
- Para afirmar que um teorema é falso, basta apresentar um contra-exemplo.

Demonstração de Teoremas — (VII)

Demonstrando um teorema...

Para demonstrar um teoremas, temos uma espécie de “receita de bolo”:

- Expresse o teorema a ser demonstrado como uma fórmula da lógica de predicados.
- Demonstre o teorema, fazendo todas as deduções passo a passo. As deduções são similares ao que já estudamos de dedução natural.
- A partir da dedução, obtenha o texto final da demonstração.

Demonstração de Teoremas — (VIII)

Demonstrando um teorema...

- Nesta disciplina seguiremos a abordagem do livro “How to Prove it” que divide a demonstração de um teorema em duas partes.
 - **Rascunho:** No rascunho são feitas todas as deduções necessárias para a conclusão de que o teorema é verdadeiro.
 - **Texto:** Resultado final da demonstração. Texto em linguagem natural (mais alguns símbolos matemáticos) que combina todas as deduções feitas no rascunho.

Rascunho

O rascunho é composto de duas partes:

- Hipóteses: Conjunto de fórmulas que foram dadas como hipóteses pelo enunciado do teorema e suposições feitas durante o processo de demonstração.
- Provar: Conclusão que deve ser obtida por meio de deduções lógicas a partir das hipóteses.

Demonstração de Teoremas — (X)

Recapitulando...

Os passos para demonstrar um teorema são:

- Expresse o enunciado do teorema como uma fórmula da lógica de predicados.
- Construa um rascunho e demonstre a conclusão do teorema a partir de suas hipóteses.
- A partir do rascunho construa o texto final da demonstração.

Demonstração de Teoremas — (XI)

Primeiro Exemplo...

- **Teorema 1:** Suponha $a, b \in \mathbb{R}$. Se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$.

Representando o teorema como uma fórmula lógica

$$0 < a < b \rightarrow a^2 < b^2$$

Demonstração de Teoremas — (XII)

Rascunho — Passo 1

Hipóteses

$$a, b \in \mathbb{R}$$

Provar

$$0 < a < b \rightarrow a^2 < b^2$$

- Podemos perceber que a fórmula possui a forma $P \rightarrow Q$.
- Para provar $P \rightarrow Q$ podemos usar ($\rightarrow I$), isto é, podemos supor como hipótese P e provar Q .

Demonstração de Teoremas — (XIII)

Rascunho — Passo 2

- Após supor o lado esquerdo da implicação temos o seguinte rascunho:

Hipóteses

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$0 < a < b$$

Provar

$$a^2 < b^2$$

Demonstração de Teoremas — (XIV)

Rascunho — Passo 3

- Como $a, b \in \mathbb{R}$ e $0 < a < b$ temos que $a < b$. Além disso, podemos multiplicar ambos os lados da desigualdade $a < b$ por a obtendo o seguinte rascunho:

Hipóteses

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$0 < a < b$$

$$a^2 < ab$$

Provar

$$a^2 < b^2$$

Demonstração de Teoremas — (XV)

Rascunho — Passo 4

- Multiplicando ambos os lados da desigualdade $a < b$ por b obtendo o seguinte rascunho:

Hipóteses

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$0 < a < b$$

$$a^2 < ab$$

$$ab < b^2$$

Provar

$$a^2 < b^2$$

Demonstração de Teoremas — (XVI)

Rascunho — Passo 5

- Observe que se $a^2 < ab$ e $ab < b^2$ temos $a^2 < ab < b^2$.

Hipóteses

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$0 < a < b$$

$$a^2 < ab$$

$$ab < b^2$$

$$a^2 < ab < b^2$$

Provar

$$a^2 < b^2$$

Demonstração de Teoremas — (XVII)

Rascunho — Passo 6

- Finalmente como temos que $a^2 < ab < b^2$, podemos concluir $a^2 < b^2$.

Hipóteses

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$0 < a < b$$

$$a^2 < ab$$

$$ab < b^2$$

$$a^2 < ab < b^2$$

Provar

$$a^2 < b^2$$

Demonstração de Teoremas — (XVIII)

E então...

- Como obtemos a dedução da conclusão $a^2 < b^2$ a partir das hipóteses, provamos o teorema.
- Será apresentado o texto do teorema para que você o compare com a dedução antes de explicar como obter o texto a partir da dedução.

Demonstração de Teoremas — (XIX)

Texto da Prova

Teorema 1: Suponha $a, b \in \mathbb{R}$. Se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$.

Prova: Suponha $0 < a < b$. Multiplicando a desigualdade $a < b$ por a podemos concluir que $a^2 < ab$ e similarmente multiplicando por b obtemos $ab < b^2$. Logo, temos que $a^2 < ab < b^2$ e portanto $a^2 < b^2$ como requerido. Assim, se $0 < a < b$ então $a^2 < b^2$.

Estratégias de Prova

- A partir do exemplo anterior podemos deduzir nossa primeira estratégia de prova: Provar afirmativas da forma $P \rightarrow Q$.
- As estratégias de prova serão organizadas da seguinte maneira:
 - Primeiramente será apresentado o formato do rascunho antes da utilização da estratégia.
 - Em seguida será apresentado o rascunho após a utilização da estratégia.
 - Finalmente será mostrado um gabarito de como escrever o texto de uma prova que envolva a estratégia utilizada.

Estratégia de Prova 1

- **Para provar uma afirmativa $P \rightarrow Q$:**

Rascunho antes de usar a estratégia:

Hipóteses	Provar
...	$P \rightarrow Q$

Rascunho depois de usar a estratégia:

Hipóteses	Provar
...	Q
P	

Estratégia de Prova 1

- **Para provar uma afirmativa $P \rightarrow Q$:**

Texto final da prova:

Suponha P .

[Texto da prova de Q].

Portanto, podemos concluir que $P \rightarrow Q$.

Exercícios

- **Teorema 1:** Suponha que $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a < b$ então $\frac{a+b}{2}$.
- **Teorema 2:** Suponha que $A \setminus B \subseteq C \cap D$ e $x \in A$. Se $x \notin D$ então $x \in B$.