Técnicas para Demonstração de Teoremas — Parte II

Matemática Discreta I

Rodrigo Ribeiro

Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas
Universidade de Federal de Ouro Preto

26 de janeiro de 2013

Demonstração de Teoremas — (I)

Anteriormente...

- Foi apresentada uma estratégia de prova para afirmativas do tipo $P \to Q$.
- Existe outra estratégia para provas de afirmativas deste tipo. Esta é baseada no fato de que $P \to Q = \neg Q \to \neg P$

Demonstração de Teoremas — (II)

Estratégia de Prova 2

- **Para provar uma afirmativa $P \to Q$:**

  Rascunho antes de usar a estratégia:

Hipóteses	**Provar**
...	$P \to Q$

  Rascunho depois de usar a estratégia:

Hipóteses	**Provar**
...	$\neg P$
$\neg Q$	

Estratégia de Prova 2

- **Para provar uma afirmativa $P \rightarrow Q$:**

  Texto final da prova:

  Suponha que Q é falso.

  [Texto da prova de $\neg P$].

  Portanto, podemos concluir que $P \rightarrow Q$.

Demonstração de Teoremas — (IV)

Exemplo

- **Teorema 2:** Suponha $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a > b$. Se $ac \leq bc$ então $c \leq 0$.

Demonstração de Teoremas — (V)

Hipóteses do teorema

- $a, b, c \in \mathbb{R}$
- $a > b$

Expressando o teorema usando lógica

$$ac \leq bc \rightarrow c \leq 0$$

Demonstração de Teoremas — (VI)

Rascunho — Passo 1

Hipóteses	**Provar**
$a, b, c \in \mathbb{R}$	$ac \leq bc \rightarrow c \leq 0$
$a > b$	

- Podemos perceber que a fórmula possui a forma $P \rightarrow Q$. Portanto, podemos supor como hipótese $\neg Q$ e provar $\neg P$.

Demonstração de Teoremas — (VII)

Rascunho — Passo 2

Hipóteses	**Provar**
$a, b, c \in \mathbb{R}$	$\neg(ac \leq bc)$
$a > b$	
$\neg(c \leq 0)$	

- Sabemos que $\neg(x \leq y) = x > y$

Demonstração de Teoremas — (VIII)

Rascunho — Passo 3

Hipóteses	**Provar**
$a, b, c \in \mathbb{R}$	$ac > bc$
$a > b$	
$c > 0$	

- Como $c > 0$, podemos multiplicar ambos os lados da desigualdade $a > b$ por c.

Demonstração de Teoremas — (IX)

Rascunho — Passo 3

Hipóteses	**Provar**
$a, b, c \in \mathbb{R}$	$ac > bc$
$a > b$	
$c > 0$	
$ac > bc$	

- Com isso concluímos a prova!

Demonstração de Teoremas — (X)

Obtendo o texto final a partir do gabarito...

- Seguindo o gabarito da estratégia...

  Suponha que $c > 0$.

  [Texto da prova de $\neg P$].

  Portanto, podemos concluir que se $a > b$ e $ac \leq bc$ então $c \leq 0$.

Demonstração de Teoremas — (XI)

Obtendo o texto final a partir do gabarito...

- Colocando a prova de $\neg P$...

  Suponha que $c > 0$.
  Como $a > b$ e $c > 0$, podemos mutiplicar ambos os lados de $a > b$ por c, obtendo $ac > bc$.
  Portanto, podemos concluir que se $a > b$ e $ac \leq bc$ então $c \leq 0$.

Demonstração de Teoremas — (XII)

Texto Final da Prova

Teorema 2: Suponha $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a > b$. Se $ac \leq bc$ então $c \leq 0$.
Prova: Suponha que $c > 0$. Como $a > b$ e $c > 0$, podemos mutiplicar ambos os lados de $a > b$ por c sem alterar a desigualdade original, obtendo $ac > bc$. Portanto, podemos concluir que se $a > b$ e $ac \leq bc$ então $c \leq 0$.

Demonstração de Teoremas — (XIII)

Exercício

Teorema 2: Suponha $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < b$ e $d > 0$. Se $ac \geq bd$ então $c > d$.

Demonstração de Teoremas — (XIV)

Estratégia de Prova 3

- **Para provar uma afirmativa $\neg P$:**

  Tente reexpressar $\neg P$ de outra maneira (usando álgebra booleana). E use outra estratégia de prova apropriada.

Demonstração de Teoremas — (XV)

Exemplo

- **Teorema 3:** Suponha $A \cap C \subseteq B$ e $a \in C$. Então $a \notin A \setminus B$.

Demonstração de Teoremas — (XVI)

Hipóteses do teorema

- $A \cap C \subseteq B$
- $a \in C$

Expressando o teorema usando lógica

$$\neg(a \in A \setminus B)$$

Demonstração de Teoremas — (XVII)

Aplicando a estratégia

- Como temos que provar $\neg(a \in A \setminus B)$ e que esta possui a forma $\neg P$, podemos reexpressar $\neg(a \in A \setminus B)$ em termos de outros conectivos lógicos.

$$\begin{array}{ll}
\neg(a \in A \setminus B) & = \\
\neg(a \in A \wedge \neg a \in B) & = \\
\neg a \in A \vee \neg\neg a \in B & = \\
\neg a \in A \vee a \in B & = \\
a \in A \rightarrow a \in B &
\end{array}$$

Demonstração de Teoremas — (XVIII)

Após um pouco de álgebra...

- Trocamos uma demonstração envolvendo $\neg(a \in A \setminus B)$ por uma envolvendo $a \in A \rightarrow a \in B$ que é mais simples.
- Agora é só usar uma das estratégias que envolvem o conectivo $\rightarrow$.

Demonstração de Teoremas — (XIX)

Estratégia de Prova 4

- **Para provar uma afirmativa $\neg P$:**

  Assuma que P é verdadeiro e tente obter uma contradição. Se você conseguir, poderá concluir que $\neg P$ é verdadeiro pelo princípio do terceiro excluído.

Demonstração de Teoremas — (XX)

Estratégia de Prova 4

- **Para provar uma afirmativa $\neg P$:**

  Rascunho antes de usar a estratégia:

Hipóteses	**Provar**
...	$\neg P$

  Rascunho depois de usar a estratégia:

Hipóteses	**Provar**
...	$\perp$
P	

Demonstração de Teoremas — (XXI)

Estratégia de Prova 4

- **Para provar uma afirmativa $\neg P$:**

  Texto final da prova:

  Suponha que P é verdadeiro.

  [Texto da prova de $\perp$].

  Portanto, podemos concluir que P é falso.

Demonstração de Teoremas — (XXII)

Exemplo

- **Teorema 4:** Se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$.

Expressando o teorema usando lógica

$$x^2 + y = 13 \wedge y \neq 4 \rightarrow x \neq 3$$

Demonstração de Teoremas — (XXIII)

Rascunho — Passo 1

Hipóteses	**Provar**
	$x^2 + y = 13 \land y \neq 4 \rightarrow x \neq 3$

- Como a fórmula tem é da forma $P \rightarrow Q$, podemos supor P e provar Q.

Demonstração de Teoremas — (XXIV)

Rascunho — Passo 2

Hipóteses	**Provar**
$x^2 + y = 13 \wedge y \neq 4$	$x \neq 3$

- Podemos agora dividir $x^2 + y = 13 \wedge y \neq 4$ em $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$.

Demonstração de Teoremas — (XXV)

Rascunho — Passo 3

Hipóteses	**Provar**
$x^2 + y = 13$	$x \neq 3$
$y \neq 4$	

- Agora temos que provar que $x \neq 3$. Para isso podemos usar a estratégia de supor $x = 3$ e obter uma contradição.

Demonstração de Teoremas — (XXVI)

Rascunho — Passo 4

Hipóteses	**Provar**
$x^2 + y = 13$	$\perp$
$y \neq 4$	
$x = 3$	

- Substituindo 3 na equação obtemos...

Demonstração de Teoremas — (XXVII)

Rascunho — Passo 5

Hipóteses	**Provar**
$9 + y = 13$	$\perp$
$y \neq 4$	
$x = 3$	

- Mas na equação $9 + y = 13$, temos que $y = 4$. Contradição! Portanto podemos concluir que $x \neq 3$ como requerido.

Demonstração de Teoremas — (XXVIII)

Obtendo o texto final a partir do gabarito...

- Primeiro o gabarito da estratégia $P \rightarrow Q$

  Suponha que $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$.

  [Texto da prova de $x \neq 3$].

  Portanto, podemos concluir que se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$.

Demonstração de Teoremas — (XXIX)

Obtendo o texto final a partir do gabarito...

- Agora o gabarito da estratégia $\neg P$

Suponha que $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$.

Suponha que $x = 3$.

[Texto da prova de $\perp$]

Portanto podemos concluir que $x \neq 3$

Portanto, podemos concluir que se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$.

Demonstração de Teoremas — (XXX)

Texto da Prova

Teorema 4: Se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$.
Prova: Suponha que $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$.
Suponha, agora que $x = 3$. Substituindo $x = 3$ em $x^2 + y = 13$: temos que $9 + y = 13$ e finalmente $y = 4$. Mas sabemos que $y \neq 4$, o que constitui uma contradição. Portanto a suposição de que $x = 3$ não pode ser verdadeira e portanto temos que $x \neq 3$.
Portanto, podemos concluir que se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$ então $x \neq 3$

Demonstração de Teoremas — (XXXI)

Estratégias para uso de Hipóteses

- Uma importante tática durante a demonstração é saber utilizar hipóteses.
- Para isso, precisamos conhecer estratégias para lidar com hipóteses que possuam um determinado formato.

Demonstração de Teoremas — (XXXII)

Estratégia para uso de Hipóteses 1

- **Para usar uma hipótese da forma $\neg P$:**

  Em uma prova por contradição adicione P às fórmulas a serem provadas. Se você provar que P é verdadeiro, como $\neg P$ é uma hipótese, isso constitui uma contradição.

Demonstração de Teoremas — (XXXIII)

Estratégia para uso de Hipóteses 1

- **Para usar uma hipótese da forma $\neg P$:**

  Rascunho antes de usar a estratégia:

Hipóteses	**Provar**
$\neg P$	$\perp$
$\ldots$	

  Rascunho depois de usar a estratégia:

Hipóteses	**Provar**
$\neg P$	P
$\ldots$	

Demonstração de Teoremas — (XXXIV)

Exercício

Teorema 4: Suponha A, B e C conjuntos tais que $A \setminus B \subseteq C$. Se $x \in A \setminus C$ então $x \in B$.

Demonstração de Teoremas — (XXXV)

Estratégia para uso de Hipóteses 2

- **Para usar uma hipótese da forma $\neg P$:**

  Se possível, tente reexpressar $\neg P$ em termos de outros conectivos lógicos usando equivalências algébricas.

Demonstração de Teoremas — (XXXVI)

Estratégia para uso de Hipóteses 3

- **Para usar uma hipótese da forma $P \to Q$:** Use esta hipótese para deduzir Q ou $\neg P$ usando *modus ponens* ou *modus tollens* respectivamente.

Exercício

Teorema 4: Suponha $A \subseteq B$, $a \in A$, $a \notin B \setminus C$. Então, $a \in C$.