

Relações — Conceitos Básicos

Matemática Discreta I

Rodrigo Ribeiro

Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas
Universidade Federal de Ouro Preto

6 de março de 2013

Relações — (I)

Produto Cartesiano

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Então o produto cartesiano de A e B , $A \times B$ é definido como:

- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Relações — (II)

Exercício

Teorema: Sejam A , B e C conjuntos quaisquer.
Então $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Relações — (III)

Definição de Relação

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Então $R \subseteq A \times B$ é dito ser uma relação de A em B .

Exemplos

- $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ e $R = \{(1, 3), (1, 4)\}$
- P = conjunto de todas as pessoas e
 $R = \{(x, y) \mid x \text{ é filho de } y\}$

Relações — (IV)

Definições

Seja R uma relação de A em B então:

- O domínio de R , $dom(R)$, é definido como:
 $dom(R) = \{a \mid \exists b. b \in B \wedge (a, b) \in R\}.$
- A imagem de R , $ran(R)$, é definida como:
 $ran(R) = \{b \mid \exists a. a \in A \wedge (a, b) \in R\}.$
- A inversa de R , R^{-1} , é uma relação de B em A definida como: $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$

Relações — (V)

Definições

Seja R uma relação de A em B então e S uma relação de B em C .

- A composição de S e R , $S \circ R$, é definida como:
$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b. b \in B \wedge (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

Relações — (VI)

Exemplos

Considere os seguintes conjuntos:

- E : conjunto de estudantes da UFOP.
- C : conjunto de cursos da UFOP.
- D : conjunto de disciplinas da UFOP.
- P : conjunto de professores da UFOP.

Relações — (VII)

Exemplos...

e as seguintes relações sobre eles...

- $R_1 = \{(p, d) \in P \times D \mid p \text{ leciona a disc. } d\}.$
- $R_2 = \{(d, c) \in D \times C \mid d \text{ está no curso } c\}.$
- $R_3 = \{(e, d) \in E \times D \mid e \text{ está matr. em } d\}.$

Exercício

Descreva as seguintes relações:

- $R_2 \circ R_1$
- $R_2 \circ R_3$

Relações — (VIII)

Exercícios

Seja R uma relação de A em B , S uma relação de B em C e T uma relação de C em D . Prove que:

- $(R^{-1})^{-1} = R$.
- $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

Relações — (IX)

Definição

Seja A um conjunto qualquer. Dizemos que R é uma relação binária sobre A se $R \subseteq A \times A$.

Classificando Relações Binárias

Seja R uma relação binária sobre A .

- R é reflexiva se $\forall x. x \in A \rightarrow xRx$
- R é transitiva se
 $\forall x y z. x, y, z \in A \rightarrow xRy \wedge yRz \rightarrow xRz.$
- R é simétrica se $\forall x y. x, y \in A \rightarrow xRy \rightarrow yRx.$
- R é anti-simétrica se
 $\forall x y. x, y \in A \rightarrow xRy \wedge yRx \rightarrow x = y.$

Relações — (XI)

Exercícios

Classifique as seguintes relações binárias:

- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq y\}.$
- $S = \{(A, B) \mid A \subseteq B\}.$
- $T = \{(x, y) \mid x \text{ é um descendente de } y\}.$

Relações — (XII)

Exercícios

Seja R uma relação binária sobre A .

- Prove que se R é simétrica, então $R = R^{-1}$.
- Prove que se R é reflexiva, então R^{-1} também é reflexiva.