

Recursão e Indução Matemática

Matemática Discreta I

Rodrigo Ribeiro

Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas
Universidade Federal de Ouro Preto

10 de março de 2013

Funções Recursivas

- Diversas funções podem ser representadas por meio de recursão.
- Ex. Fatorial, soma dos n primeiros inteiros.

$$0! = 1$$

$$n! = n \times (n - 1)!$$

$$S(0) = 0$$

$$S(n) = n + S(n - 1)$$

Mas por que funções recursivas?

- Representam diretamente a estrutura do problema.
- Permitem validar se a modelagem do problema está correta de maneira simples.
- Possuem um problema: Recursão pode ser dificultar o cálculo de valores de uma função para valores elevados (muitas chamadas recursivas).

Recursão — (III)

Torres de Hanói

- Objetivo: Mover discos de uma torre para outra, sem que nenhum disco maior fique sobre um menor.
- Somente um disco pode ser movido por vez.

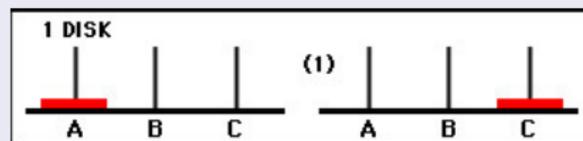


Torres de Hanói

- Problema: Como determinar a quantidade mínima de movimentos necessários para resolver o quebra-cabeça?
- Evidentemente, precisamos de 0 movimentos para resolver o quebra-cabeças com 0 discos.

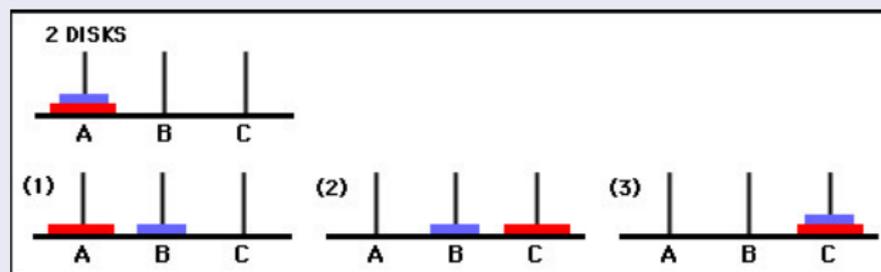
Torres de Hanói

- Solução para um disco.



Torres de Hanói

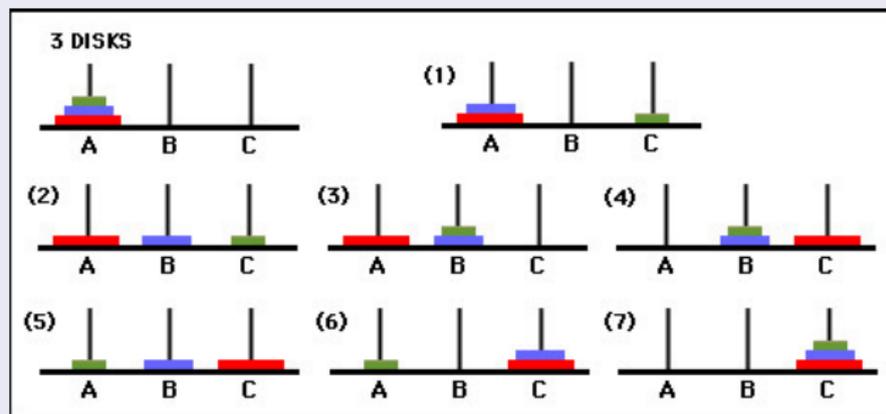
- Solução para dois discos.



Recursão — (VII)

Torres de Hanói

- Solução para três discos.



Torres de Hanói

- Estrutura da solução do problema:
 - Mova $n - 1$ discos do pino de origem para o pino auxiliar.
 - Mova o n -ésimo disco do pino de origem para o pino de destino.
 - Mova $n - 1$ discos do pino auxiliar para o pino de destino.

Torres de Hanói

- Com isso temos que o número de movimentos pode ser dado pela função recursiva:

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

- Observe que $T(0) = 0$, $T(1) = 1$, $T(2) = 3$ e $T(3) = 7$.
- Problema: Calcular $T(64)$ leva muito tempo...

Torres de Hanói

- Como calcular $T(n)$ rapidamente?
- Devemos encontrar uma função não recursiva $f(n)$ que para todo $n \in \mathbb{N}$, $T(n) = f(n)$.
- Como encontrar essa função?
 - Existem várias técnicas para isso.
 - Utilizaremos uma baseada em indução matemática.

Torres de Hanói

- A técnica pode ser resumida nos seguintes passos.
 - 1 Calcule alguns valores para a função $T(n)$.
 - 2 “Chute” uma função $f(n)$ que calcule os mesmos valores para n , de acordo com os resultados do item 1).
 - 3 Prove que seu chute foi correto utilizando indução matemática.

Recursão — (XII)

Torres de Hanói — Passo 1

n	$T(n)$
0	0
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31

Torres de Hanói — Passo 2

- Um bom palpite para esta função:
 - Observe que para cada valor de n , $T(n)$ é próximo do valor de 2^n
- Palpite: $f(n) = 2^n - 1$
- Agora é só provar por indução que para todo $n \in \mathbb{N}$, $T(n) = f(n)$.

Problema da Pizzaria

Suponha que você foi a uma pizzaria que possuía a seguinte promoção:

- “A pessoa que determinar corretamente o número de pedaços de pizza que podem ser obtidos fazendo-se n cortes não paga a pizza.”
- Como comer de graça nesta pizzaria?