

Indução Forte

Matemática Discreta I

Rodrigo Ribeiro

Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas
Universidade Federal de Ouro Preto

18 de março de 2013

Indução Forte — (I)

Problema da Indução Convencional

- Em algumas situações a suposição de que a propriedade que desejamos provar é válida para o antecessor de um número natural qualquer é insuficiente.
- Nestas situações devemos supor que a propriedade é verdadeira para todo número natural menor que $n \in \mathbb{N}$.

Indução Forte — (II)

Um exemplo...

- Considere a sequência de Fibonacci, definida como:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{(n-1)} + F_{(n-2)} \end{cases}$$

- Considere provar que:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Indução Forte — (III)

Provando por indução...

- O caso base é trivialmente verdadeiro, já que:

$$F_0 = 0 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0}{\sqrt{5}}$$

Indução Forte — (IV)

Passo Indutivo

Suponha $n \in \mathbb{N}$ arbitrário e que

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \text{ Temos que:}$$

$$\begin{aligned} F_{(n+1)} &= \\ F_n + F_{(n-1)} &= \end{aligned}$$

Problema: A hipótese de indução nos diz que a igualdade que desejamos provar é válida para F_n , mas não nos diz nada sobre $F_{(n-1)}$.

Indução Forte — (V)

Resumindo...

- Indução Matemática só nos permite concluir que $\forall n. P(n)$ é verdadeiro, supondo que esta propriedade é válida para o antecessor de n , $n - 1$. Utilizando este princípio de indução, não podemos afirmar nada sobre $n - 2$, $n - 3$, etc...

Indução Forte — (VI)

Resumindo...

- Nestas situações devemos utilizar outro princípio de indução: O chamado princípio de indução forte ou completa.
- Este princípio diz que para provar $\forall n. P(n)$ devemos supor que a propriedade P é verdadeira para todo $k < n$.

Indução Forte — (VII)

Princípio de Indução Forte

Para provar que $\forall n. P(n)$, basta provar que:

$$\forall n. (\forall k. k < n \rightarrow P(k)) \rightarrow P(n)$$

- Note que não existe caso base nesta prova...
- Sendo assim, o “truque do dominó” não funciona?

Indução Forte — (VIII)

Explicando porquê a Indução Forte Funciona

- O princípio pode ser expresso como:
 $\forall n. (\forall k. k < n \rightarrow P(k)) \rightarrow P(n).$
- Ele diz que deve ser verdadeiro para todo $n...$
Logo, é verdade para $n = 0$ com isso temos:

$$(\forall k. k < 0 \rightarrow P(k)) \rightarrow P(0) \equiv P(0)$$

como temos que $P(0)$ é verdadeiro, a mesma justificativa da indução convencional se aplica também a indução forte.

Indução Forte — (IX)

Explicando porquê a Indução Forte Funciona

- Na verdade, os dois princípios são equivalentes. A questão é que em alguns casos um é mais conveniente de ser utilizado que outro.

Indução Forte — (X)

Exercícios

- $F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$, onde F_n é n -ésimo termo da sequência de Fibonacci.
- Todo número inteiro $n > 1$ é primo ou é um produto de primos.
- Todo conjunto não vazio de números naturais possui um elemento mínimo.
- $\sqrt{2}$ é irracional.