Indução Estrutural

Matemática Discreta I

Rodrigo Ribeiro

Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas
Universidade de Federal de Ouro Preto

22 de março de 2013

Indução Estrutural — (I)

O que vimos sobre indução

- Técnica de prova conveniente para demonstrar teoremas da forma $\forall n.P(n)$, onde $n \in \mathbb{N}$.
- Mas esta técnica não se resume apenas a números naturais. Esta técnica pode ser aplicada a qualquer conjunto com algumas características especiais.

Indução Estrutural — (II)

Ordem Estrita

- Seja R uma relação binária sobre um conjunto A. Dizemos que R é irreflexiva se $\forall x . x \in A \rightarrow \neg xRx$.
- Dizemos que uma R relação sobre um conjunto A é uma ordem estrita se
  - R é irreflexiva
  - R é transitiva

Indução Estrutural — (III)

Cadeia Decrescentes e Relações Bem Formadas

- Seja R uma relação de ordem estrita sobre um conjunto A e $x_1, x_2, \ldots \in A$. Dizemos que $x_1, x_2, \ldots$ é uma cadeia decrescente se $\forall i.(x_i, x_{i+1}) \in R$.
- Dizemos que R é uma relação bem formada se esta não possui cadeias decrescentes infinitas.

Indução Estrutural — (IV)

Exemplos

- A relação $<$ definida sobre o conjunto $\mathbb{N}$ é bem formada, pois qualquer cadeia decrescente de números naturais eventualmente termina em 0.
- A relação $<$ definida sobre o conjunto $\mathbb{Z}$ não é bem formada, pois seja $n \in \mathbb{Z}$ um número inteiro qualquer. A cadeia decrescente com início em n, não é finita: $n, n-1, \ldots - \infty$

Indução Estrutural — (V)

Exercício

Seja R uma relação reflexiva qualquer sobre um conjunto A. É possível que R seja uma relação bem formada?

Indução Estrutural — (VI)

Relações Bem Formadas

- Outra maneira de definir relações bem formadas é utilizando uma noção similar a de elementos minimais.
- Seja R uma relação sobre um conjunto A tal que para todo $S \subseteq A$ existe $x \in S$ tal que $\neg\exists b.b \in A \wedge bRa$. Então, R é uma relação bem formada.

Indução Estrutural — (VII)

Exemplo

- De acordo com a definição anterior, a relação $<$ sobre $\mathbb{N}$ é bem formada, pois todo $S \subseteq \mathbb{N}$ possui um elemento mínimo.

Indução Estrutural — (VII)

Princípio de Indução Estrutural

- Seja $\prec$ uma relação bem formada sobre um conjunto A e P uma propriedade sobre elementos do conjunto A.
- Temos que $\forall a. a \in A \rightarrow P(a)$ se $\forall x. (\forall y. y \prec x \rightarrow P(y)) \rightarrow P(x)$.

Indução Estrutural — (VIII)

Exemplo

- Note que o princípio de indução forte é exatamente o princípio de indução estrutural para $\mathbb{N}$ considerando a relação $<$.

Indução Estrutural — (IX)

Listas Encadeadas

- O conjunto de listas encadeadas formadas por elementos de um conjunto A, $[A]$, pode ser definido recursivamente como:

$$[\,] \in [A]$$
$$L \in [A] \rightarrow x : L \in [A], \text{para algum } x \in A.$$

- A notação $[\,]$ denota uma lista vazia e $x : L$ representa uma lista com primeiro elemento x e cauda L.

Funções sobre Listas

- Funções sobre listas podem ser facilmente definidas por recursão sobre a lista.
- Propriedades destas são provadas por indução sobre o tamanho da lista.

```
length [] = 0
length (x : L) = 1 + length L

[] ++ L = L
(x:L1) ++ L2 = x : (L1 ++ L2)
```

Indução Estrutural — (XI)

Funções sobre Listas

- Temos que `length` calcula o tamanho de uma lista e ++ concatena duas listas.
- Podemos conjecturar que para listas l_1 e l_2 a seguinte propriedade é verdadeira:

$$\forall l_1.\forall l_2.\texttt{length}(l_1 +\!\!+\, l_2) = length\ l_1 + length\ l_2$$

- Mas como provar isso?

Indução Estrutural — (XII)

Provando Propriedades de Funções sobre Listas

- Lembre-se sempre do mantra "recursão = indução".
- Como funções são definidas de maneira recursiva, devemos provar propriedades sobre estas por indução.
- Problema: Qual o princípio de indução para listas?

Indução Estrutural — (XIII)

Princípio de Indução para Listas

- Para obter o princípio de indução para listas, basta apresentar uma relação bem formada, $\prec$, definida sobre o conjunto de listas de valores de tipo A, $[A]$.
- Para isso, basta considerar que $l \prec a : l$, para algum $a \in A$.

Indução Estrutural — (XIV)

Princípio de Indução para Listas

- O princípio de indução para listas pode ser definido como:

$$\forall l.(\forall k, k \prec l \rightarrow P(k)) \rightarrow P(l)$$

onde P é uma propriedade sobre listas.

Indução Estrutural — (XV)

Exemplos

- **Teorema**: Para todas listas l_1 e l_2, temos que $\texttt{length}(l_1 +\!+\, l_2) = length\ l_1 + length\ l_2$.
- **Teorema**: Para todas listas l_1, l_2 e l_3, temos que $(l_1{+\!+}l_2){+\!+}l_3 = l_1{+\!+}(l_2{+\!+}l_3)$.

Indução Estrutural — (XVI)

Árvores Binárias

- O conjunto de árvores binárias sobre um conjunto A, *Tree* A, pode ser definido recursivamente como:

$$Leaf \in Tree\ A$$
$$t_1, t_2 \in Tree\ A \rightarrow (N\ x\ t_1\ t_2) \in Tree\ A,$$
para algum $x \in A$

Indução Estrutural — (XVII)

Funções sobre Árvores

```
height Leaf = 0
height (N x t1 t2) = 1 + max (height t1)
                             (height t2)

size Leaf = 0
size (N x t1 t2) = 1 + size t1 + size t2
```

Indução Estrutural — (XVIII)

Exercícios

- Apresente o princípio de indução estrutural para árvores.
- Prove que para toda árvore t, `height t` $\leq$ `size t`.