Problem Set 2

Задача потребителя

Задача 1. Пусть потребитель, предпочтения которого строго монотонны, в настоящее время имеет набор, состоящий из пяти килограммов яблок и двух килограммов бананов. В данной точке предельная норма замещения яблок бананами равна 3. При этом на рынке бананы стоят вдвое дешевле яблок. Покажите, как обмен по рыночным ценам может улучшить положение данного потребителя.

Задача 2. Потребитель А выбрал набор x^A, в котором $MRS_{12}(x^A) = p_1/p_2$. Потребитель B выбрал набор x^B, в котором $MRS_{12}(x^B) > p_1/p_2$. Можно ли на основании данных наблюдений сделать вывод, что потребитель А ведет себя рационально, а потребитель В — нет?

Задача 3. Потребитель с функцией полезности $u(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$ $(A, \alpha, \beta > 0)$ платит потоварный налог в размере t рублей за единицу товара 1. Государство решило отменить этот налог и заменить его паушальным по ставке T, выбрав ее так, чтобы налог был нейтрален к государственному бюджету (то есть чтобы индивид платил одинаковую сумму при обоих видах налога). Можно ли на основании этой информации определить, в какую сторону изменится потребление индивидом обоих товаров и его благосостояние? Если да, то определите направления изменений; иначе приведите примеры параметров модели, когда значения переменных меняются в разные стороны.

Задача 4. Пусть предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u(x_1, x_2)$ (все параметры, обозначенные греческими и латинскими буквами, положительны). Найдите спрос потребителя на оба товара в зависимости от m (его дохода) и цен p_1 и p_2.

а) $u(x_1, x_2) = ax_1 + x_2$;
б) $u(x_1, x_2) = \gamma x_1^2 + x_2^2$.
в) $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1; bx_2\}$;
г) $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$;
д) (квазилинейные предпочтения) $u(x_1, x_2) = \alpha\sqrt{x_1} + x_2$;
е) $u(x_1, x_2) = -(x_1 - a)^2 - (x_2 - b)^2$

Задача 5. Рассмотрите потребителя с рациональными, монотонными, непрерывными и строго выпуклыми предпочтениями, определенными на $X = \mathbb{R}_+^N$. Потребитель покупает товары по ценам $\mathbf{p} \gg 0$ и имеет доход $I > 0$.

а) Докажите, что решение задачи максимизации полезности $x(\mathbf{p}, I)$ существует и единственно.

б) Докажите, что в этом решении будет выполнено $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = I$.
в) Докажите, что функция $x(\mathbf{p}, I)$ положительно однородна нулевой степени.
г) Справедлив ли результат пункта а), если предпочтения выпуклы, но не строго выпуклы?
д) Приведите свойство, описывающее более широкий класс предпочтений, чем монотонность, для которого тем не менее справедлив результат пункта б).

Задача 6. Функция полезности потребителя имеет квазилинейный вид: $u(\mathbf{x}) = s(x_1, ..., x_{l-1}) + x_l$. Докажите, что если на потребление l-го блага не накладывается ограничение неотрицательности, то потребление первых $l - 1$ благ не зависит от дохода.

Задача 7. Предпочтения потребителя, заданные на множестве $X = \mathbb{R}^N_+$, описываются функцией полезности вида:

$$u(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i}, \text{ где } \alpha_i > 0.$$

Потребитель обладает доходом $m > 0$ и приобретает товары по ценам $p \gg 0$.

а) Докажите, что в оптимальном наборе потребителя должно содержаться положительное количество каждого товара. (Находить функции спроса не требуется.)

б) Покажите, что расходы на каждый товар составляют фиксированную долю дохода.

Задача 8. Студент решал следующую задачу.

> $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ — функция полезности потребителя $\mathcal{A}$. В настоящий момент агент $\mathcal{A}$ владеет корзиной товаров $(2, 5)$, на которую он потратил весь свой доход. Однако цены на рынке резко изменились и теперь составляют $p_1 = 3$ и $p_2 = 2$. Покажите, что возможен обмен по рыночным ценам, от которого потребитель выиграет. Предложите вариант такого обмена.

Вам предстоит найти все ошибки в приведенном ниже решении студента.

> *«Сравним субъективную оценку первого товара потребителя $\mathcal{A}$ с объективной рыночной оценкой. Субъективная оценка потребителя определяется величиной предельной нормы замещения, а рыночная оценка — отношением цен. В данном случае оценка потребителя превышает рыночную:*
>
> $$MRS^{\mathcal{A}}_{12}(2,5) = \left.\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2}\right|_{(2,5)} = \left.\frac{x_2}{x_1}\right|_{(2,5)} = 2{,}5 > \frac{p_1}{p_2} = 1{,}5.$$
>
> *Это означает, что потребитель выиграет, обменяв второй товар на первый по рыночным ценам. Пример подобного обмена: три единицы второго товара потребитель обменивает на две единицы первого: стоимость трех единиц второго товара составит 6 ден. единиц и ровно столько же стоят две единицы первого. Поскольку обмен произведен в пропорции 3 к 2, а потребитель готов был за две единицы первого товара отдать вплоть до 5 единиц* ***второго****, то этот обмен улучшил его благосостояние».*

Задача 9[1]**.** В экономике с двумя товарами функция полезности потребителя имеет вид $u(x_1, x_2) = \max[ax_1, ax_2] + \min[x_1, x_2]$, где $0 < a < 1$.

а) Найдите функции маршалловского спроса.

б) Сделайте то же самое, если $u(\cdot) = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$.

Задача 10[2]**.** Предположим, что функция полезности потребителя квазилинейна и зависит от двух благ: $u(\mathbf{x}) = s(x_1) + x_2$. Первое благо может потребляться лишь в дискретных (целых неотрицательных) количествах, а второе благо («деньги, используемые на приобретение других благ») — в любых количествах (возможно, отрицательных). Пусть $r(i) = s(i) - s(i-1)$ (оценка потребителем i-й единицы первого блага). Цена второго блага равна единице.

[1] а) Jehle, Reny, задача 1.27. б) Бусыгин, Желободько, Цыплаков, задача 2.89

[2] Бусыгин В.П, Желободько Е.В, Цыплаков А.А. *Микроэкономика: третий уровень.* (Задача 2.15)

а) Покажите, что $r(i)$ равна такой цене первого блага, при которой потребитель безразличен в выборе между потреблением первого блага в количестве $i-1$ и в количестве i.

б) Покажите, что если потребитель приобретает n единиц первого блага, то выполнено соотношение $r(n) \geqslant p_1 \geqslant r(n+1)$, где p_1 — цена первого блага. При каких условиях верно и обратное утверждение?

в) Какова величина компенсации в форме второго блага («в деньгах»), при которой потребитель будет готов полностью отказаться от потребления первого блага (увеличив тем самым потребление второго блага на величину компенсации)?

Задача 11. Китаец обладает денежным доходом I юаней в неделю и весь его тратит только на два вида риса — обычный рис и праздничный рис высокого качества. Чтобы полностью насытиться и не умереть с голоду, ему необходимо и достаточно потребить ровно три килограмма риса в неделю, при этом порция праздничного риса ему нравится больше. Сейчас он ест праздничный рис по выходным и праздникам, а обычный рис по остальным дням. В какую сторону будет меняться потребление обычного и праздничного риса при изменении соответствующих цен? Приведите содержательное объяснение полученных зависимостей.

Задача 12. В японском ресторане «Воскресная схватка» подают только суши (S) и роллы (R). Их подают только сетами: сет «макуноути» включает в себя 8 суши и 4 ролла, сет «Тиётайкая» — 4 суши и 8 роллов, а сет «одзэки» — 1 суши и 16 роллов. Сеты можно купить по ценам 6 ¥, 10 ¥ и 9 ¥ соответственно в любом неотрицательном целочисленном количестве.

Предпочтения постоянного посетителя ресторана йокодзуны Мусасимары относительно суши и роллов строго монотонны. Каждый раз перед походом в ресторан йокодзуна решает, какую максимальную сумму m он истратит на суши и роллы.

а) Известно, что в прошлое воскресенье Мусасимара-сан заказал в ресторане только один сет «Тиётайкая». Что можно сказать о том, какие значения могла принять в тот день величина m?

б) Предположим, что предпочтения Мусасимары описываются функцией полезности Кобба-Дугласа $U(S,R) = S^{1-\alpha}R^{\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$. Оцените, в каких пределах может находиться параметр α.

в) Владелец ресторана господин Мусояма подумывает, не начать ли продавать суши и роллы поштучно, по ценам 1 ¥ и 2 ¥ соответственно. Что можно сказать о том, сколько роллов купил бы йокодзуна Мусасимара, если бы владелец ресторана применил такую ценовую политику уже в прошлое воскресенье?

г) Новый посетитель ресторана йокодзуна Таканохана собирался заказать два сета «макуноути» и сет «Тиётайкая», но заметив, что ему не хватает одной иены, заказал два сета «одзэки». Могут ли предпочтения Таканоханы относительно суши и роллов описываться функцией полезности Кобба-Дугласа? Ответ поясните.

Задача 13. У мальчика Барта строго монотонные и строго выпуклые предпочтения относительно чипсов (x_1) и пива (x_2), представимые функцией полезности. Известно, что при ценах $p_1 = p_2 = 1$ и доходе $m > 0$ Барт выбрал набор $(x_1^*; x_2^*) \gg 0$. Папа Гомер предлагает Барту целевой денежный трансферт T $(0 < T \leqslant x_1^*)$, который должен быть полностью потрачен на чипсы. Барт может отказаться от получения трансферта.

а) Верно ли следующее утверждение: «Если чипсы являются нормальным благом, то этот целевой трансферт повлияет на потребление Барта так же, как повлиял бы безусловный трансферт[3] такой же величины»?

[3] Такой, который можно тратить на любой товар.

б) Верно ли следующее утверждение: «Если первый товар является инфериорным при $m > x_1^* + x_2^*$, то этот целевой трансферт повлияет на потребление Барта так же, как и безусловный трансферт такой же величины»?

в) Пусть предпочтения Барта гомотетичны и $(x_1^*; x_2^*) = (12; 36)$. Найдите и изобразите графически спрос на первый товар как функцию от величины целевого трансферта T (для $T \in [0; +\infty)$), откладывая трансферт по горизонтали, а количество первого товара — по вертикали. При каком значении T график имеет излом? Объясните причину появления излома.

Задача 14. **(Повторение)** Индивид потребляет только два блага в количестве x и y. Он предпочитает набор (x', y') набору (x, y), если выполнено одно из двух свойств:

- $2x' + y' > 2x + y$
- $2x' + y' = 2x + y$ и $x' > x$.

Кроме того, наборы эквивалентны в том и только в том случае, если $x' = x$, $y' = y$. Обладают ли предпочтения индивида свойствами непрерывности, строгой монотонности, строгой выпуклости?

Задача 15. **(Повторение)** Профессор Л. рассчитывает оценку за курс ($\text{О}_{\text{итог}}$) с учетом накопленной оценки ($\text{О}_{\text{нак}}$) и оценки, полученной на зачете ($\text{О}_{\text{зач}}$) следующим образом:

$$\text{О}_{\text{итог}} = \max\{0{,}6\text{О}_{\text{нак}} + 0{,}4\text{О}_{\text{зач}}; 0{,}3\text{О}_{\text{нак}} + 0{,}7\text{О}_{\text{зач}}\}.$$

Любая из оценок $\text{О}_{\text{нак}}$ и $\text{О}_{\text{зач}}$ может принимать любые положительные значения, не превышающие 10. Будем полагать, что благосостояние студента определяется оценкой $\text{О}_{\text{итог}}$: чем она больше, тем студенту лучше, и студенту без разницы, каким способом получена оценка.

а) В пространстве двух оценок $\text{О}_{\text{нак}}$ и $\text{О}_{\text{зач}}$ изобразите кривые безразличия, соответствующие предпочтениям студента относительно этих оценок.

б) Являются ли предпочтения студента относительно $\text{О}_{\text{нак}}$ и $\text{О}_{\text{зач}}$ монотонными, строго монотонными, слабо монотонными, выпуклыми, строго выпуклыми?

в) Предположим, зачет состоит из двух частей, за каждую из которых можно набрать до 50 баллов. Оценка за зачет получается следующим образом: баллы за каждую часть делятся на 10, округляются вниз и складываются:

$$\text{О}_{\text{зач}} = \left\lfloor \frac{\text{О}_1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\text{О}_2}{10} \right\rfloor.$$

Нарисуйте кривые безразличия и проверьте те же свойства предпочтений, если студент уже пришел на зачет и ему осталось «выбрать» О_1 и О_2.