Problem Set 5

Теория производства, минимизация издержек

Задача 1

а) Производственная функция Кобба-Дугласа задана формулой $f(\mathbf{x}) = A\prod x_i^{\alpha_i}$, все параметры положительны. Как будет зависеть отдача от масштаба производства от параметров этой функции?

б) Может ли процесс производства характеризоваться одновременно убыванием предельного продукта фактора и возрастающей отдачей от масштаба? В чем заключается содержательная разница между концепцией отдачи от масштаба и отдачи на фактор производства?

в) Назовите какие-либо причины, следствием которых является *возрастающая* отдача от масштаба для реальных технологических процессов.

г) Назовите какие-либо причины, следствием которых является *убывающая* отдача от масштаба для реальных технологических процессов.

д) Приведите определение изокванты. Могут ли изокванты пересекаться? Может ли изокванта иметь положительный наклон? Может ли изокванта быть «толстой линией»?

Задача 2

Рассмотрите фирму с производственной функцией $y = f(K, L)$ характеризующейся убывающим предельным продуктом каждого фактора. В краткосрочном периоде капитал фиксирован.

а) Обозначив цену готовой продукции через p, а цены труда и капитала через w и r соответственно, выпишите задачу максимизации прибыли и выведите условие первого порядка, характеризующие ее решение, полагая, что решение задачи внутреннее. Поясните, почему решение задачи будет определяться F.O.C. Проиллюстрируйте решение графически.

б) Пусть правительство ввело субсидию, равную $s\,\$$ $(s < w)$, на каждую используемую единицу труда. Как изменится используемое количество труда, предложение готовой продукции и прибыль фирмы? Приведите графическое и аналитическое решение.

Задача 3

Изобразите схематично изокванты, найдите $MRTS_{LK}$ для следующих технологий. Как ведет себя $MRTS$ для данных технологий при движении вдоль изокванты? Считайте, что все параметры, обозначенные греческими и латинскими буквами, положительны.

а) $f(L, K) = aL + bK$

б) $f(L, K) = \min\{aL; bK\}$.

в) $f(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$

г) $f(L, K) = \sqrt{L} + \sqrt{K}$

Задача 4

Производственная функция фирмы имеет вид $f(K, L) = K^{\alpha}L^{\beta}$.

а) Найдите краткосрочный условный спрос на труд, считая, что капитал является фиксированным на уровне $\overline{K}$. Найдите краткосрочную функцию издержек фирмы.

б) Найдите спрос на факторы производства в долгосрочном периоде и долгосрочную функцию издержек фирмы.

Задача 5

Исследования некоторого производственного процесса показали, что производственная функция за рассматриваемый период может быть аппроксимирована следующей функцией: $q(L,K,N) = 0{,}1LNK + 3L^2N^2K - 0{,}1L^3NK$, где L, N и K — объемы использования труда (в часах), количества работников (в сотнях штатных единицах), занятых в производстве, и капитала (в квадратных метрах) в данном производстве соответственно. В краткосрочном периоде объем капитала фиксирован и равен 10, а штат сотрудников, занятых в производстве, составляет 100 работников.

а) На двух графиках, расположенных один под другим в соответствии, один из которых выполнен в координатах «объем труда — выпуск», а другой в координатах «объем труда — предельный и средний продукты» проиллюстрируйте соотношение между средним и предельным продуктом, приведя необходимые экономические объяснения этого соотношения.

б) Используя дифференцируемость производственной функции и функции среднего продукта, докажите **для произвольной технологии** полученные в пункте а) соотношения между средним и предельным продуктом.

в) Найдите предельный продукт штатной единицы (в сотнях), занятой в производстве, для указанной в условии задачи технологии. Удовлетворяет ли «закону убывания предельного продукта» найденный предельный продукт? Объясните полученный результат.

Задача 6[1]

Чтобы произвести один хот-дог, нужна булочка (x_1), сосиска (x_2), горчица (x_3), кетчуп (x_4), особая приправа (секрет фирмы, x_5), свежий лук (x_6), продавец (x_7) и стойка, за которой он стоит (x_8). Ниже представлена таблица затрат на единицу каждого ингредиента:

Ресурс	Цена ресурса
1 булочка	4,5 р.
1 сосиска	15 р.
1 порция горчицы	1,5 р.
1 порция кетчупа	1,5 р.
1 порция особой приправы	3 р.
1 порция свежего лука	4,5 р.
1 час продавца (зарплата)	180 р.
1 час стойки (арендная плата)	270 р.

Один продавец, стоя за одной стойкой в течение часа, готовит 30 хот-догов.

а) Составьте производственную функцию производителя хот-догов. Какой отдачей от масштаба обладает технология?

б) Сформулируйте задачу максимизации прибыли фирмы, если цена хот-дога равна 50 р. Имеет ли эта задача решение?

Задача 7

Повторите решение задачи 4 для всех производственных функций, данных в задаче 3.

[1] Peter Norman, UBC Department of Economics, Economics 301-002, Winter 2004

Задача 8

Производственная функция имеет вид: $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2^2$.

а) Охарактеризуйте поведение предельного продукта каждого фактора производства.

б) Охарактеризуйте отдачу от масштаба для данной технологии.

в) Предположим, что количество второго фактора фиксировано и равно $\bar{x}_2$.

(i) Изобразите графически зависимость объема выпускаемой продукции от объема использования первого фактора.

(ii) Проиллюстрируйте на этом же графике средний и предельный продукт труда в нескольких точках. Постройте под графиком объема выпускаемой продукции и в соответствии с ним графики среднего и предельного продукта первого фактора.

г) Найдите спрос на переменный фактор в краткосрочном периоде.

Задача 9

Студент НИУ ВШЭ размышляет, как ему подработать в каникулы. У него есть идея взять в аренду газонокосилку и косить газоны в городе. В этом случае у него есть два варианта. Взяв в аренду большую газонокосилку по ставке w_1 за час, он сможет косить 3 сотки газона за час, а расход топлива (бензина) составит 1 литр в час. Арендовав маленькую газонокосилку за w_2 в час, студент сможет скосить лишь 1 сотку газона за час, при этом будет израсходована лишь 1/3 литра бензина. Альтернативная занятость приносит студенту w_3 в час, а цена бензина составляет w_4 за один литр.

а) Обозначив количества используемых факторов производства через z_1, z_2 z_3, z_4 соответственно, запишите выражения для производственных функций обеих газонокосилок.

б) Выведите соответствующие функции издержек.

в) В каком случае (при каком соотношении параметров) выгоднее использовать маленькую газонокосилку, а не большую? Зависит ли результат от цены бензина? Почему?

г) Пусть $w_1 = 12$, $w_2 = 5$, $w_3 = 9$, $w_4 = 3$. При какой минимальной зарплате за сотку газона скошенной травы студент предпочтет летом заняться данным бизнесом? Будет ли он использовать большую или маленькую газонокосилку?

Задача 10 (при сильном желании)

Рассмотрите производственную функцию Кобба-Дугласа с постоянной отдачей от масштаба $Y = A(t)K^a L^{(1-a)}$, где K, L — объемы потребляемых факторов, $0 < a < 1$, $A(t)$ — зависимость от времени общефакторной производительности (total factor productivity, TFP). TFP — это вклад, который в производство вносят вещи, иные чем потребление факторов производства (например, совершенство технологии, растущее с техническим прогрессом).

а) Пользуясь знаниями о логарифмах, запишите уравнение, связывающее процентные изменения Y, L, K и TFP при малых изменениях t. Как можно измерить темп прироста TFP, если знать темпы прироста всех остальных величин?

б) При некоторых обстоятельствах темп прироста средней производительности труда со временем — хороший показатель для определения темпа прироста TFP. Укажите, какие это обстоятельства. (Подсказка: смотрите на соотношение K/L.)

в) Объясните интуитивно, почему рост соотношения K/L в некотором смысле похож на рост TFP. (Можно подумать об $Y(\cdot)$ как о макроэкономической производственной функции, а о самом Y — как о реальном ВВП.) При каких обстоятельствах происходят эти явления?

Статьи

- **Классическая статья о том, откуда берутся фирмы:** Coase, Ronald (1937). "The Nature of the Firm". *Economica* 4 (16): 386–405

- **Производственные функции с CES:** Arrow, K. J.; Chenery, H. B.; Minhas, B. S.; Solow, R. M. (1961). "Capital-labor substitution and economic efficiency". *Review of Economics and Statistics* 43 (3): 225–250.

- **О том, как можно на практике строить производственные функции:** G. Thomas Sav, "The Engineering Approach to Production Functions Revisited: An Application to Solar Processes," *The Journal of Industrial Economics* (September 1984): 21–35.