



Festín de Mónica Clapp 2011

El lujo del flujo y teoremas minimax en el cálculo de variaciones

Nils Ackermann

Junio 2011

Índice

1. Introducción	1
1.1. Notación	2
2. Sistemas dinámicos continuos en espacios de Hilbert	2
2.1. Integración en espacios de Hilbert	2
2.2. Existencia y unicidad para ecuaciones ordinarias	7
2.3. Propiedades del flujo	11
3. El teorema del paso de montaña	13
4. Aplicaciones a ecuaciones elípticas semilineales	15

1. Introducción

En la teoría variacional clásica (o directa) uno trata de encontrar puntos críticos que son extremos de un funcional diferenciable J definido en un espacio de Banach o en una

variedad. Por ejemplo, el problema

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(u), & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

puesto en un dominio acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ con $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$, se presta para aplicar minimización en la Variedad de Nehari si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cumple una cota de crecimiento subcrítica, $f(0) = f'(0) = 0$ y

$$(1.2) \quad t \mapsto \frac{f(t)}{|t|}$$

es estrictamente creciente. El ejemplo estándar de ese caso es $f(u) = |u|^{p-2}u$ con $p \in (2, 2^*)$.

No obstante, la condición (1.2) es un obstáculo fuerte si uno se quiere acercar a las aplicaciones, así que en este minicurso trataremos de demostrar teoremas de existencia sin suponer (1.2). Esa generalización impide el uso de minimización de J en la variedad de Nehari para encontrar puntos críticos. Demostremos algunos *teoremas minimax*, es decir, existencia de puntos silla, entre ellos el *teorema del paso de montaña* y un teorema sobre *enlace por simetría*. Aquellas técnicas requieren del uso de *flujos*, los cuales son sistemas dinámicos continuos inducidos por las soluciones de ciertas ecuaciones ordinarias en espacios de Banach.

1.1. Notación

Ponemos $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$, $\mathbb{R}_0^+ := [0, \infty)$, y, de manera análoga, $\mathbb{R}^-$ y $\mathbb{R}_0^-$. En un espacio métrico X , denotemos para $x \in X$ y $r > 0$

$$\begin{aligned} B_r(x) &:= B_r(x; X) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}, & \text{bola abierta,} \\ \overline{B}_r(x) &:= \overline{B}_r(x; X) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}, & \text{bola cerrada,} \\ S_r(x) &:= S_r(x; X) := \{y \in X \mid d(x, y) = r\}, & \text{esfera.} \end{aligned}$$

Todos espacios lineales tienen el campo $\mathbb{R}$ de escalares. Si E es un espacio normado, $E^* := \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ es el *espacio dual de E* . Escribimos $B_r E := B_r(0; E)$ y también simplemente $B_r := B_r E$ si no hay duda cual es el espacio E .

2. Sistemas dinámicos continuos en espacios de Hilbert

2.1. Integración en espacios de Hilbert

2.1 Definición. Sea A un subconjunto de un espacio normado E .

- (a) A es *convexo* si $(1-t)x + ty \in A$ para todo $x, y \in A$ y $t \in [0, 1]$.

(b) La *envolvente convexa* $\text{conv}(A)$ es el conjunto de todas combinaciones convexas

$$\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i a_i$$

en A , donde $\ell \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i = 1$, $\mu_i \geq 0$ y $a_i \in A$.

2.2 Nota. La envolvente convexa de A siempre es un conjunto convexo. Es la intersección de todos conjuntos convexos que contienen a A .

2.3 Lema. *Sea*

$$(2.1) \quad a := \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i a_i$$

una combinación convexa de elementos $a_i \in \mathbb{R}^N$. Entonces a es una combinación convexa de a lo más $N + 1$ de los a_i .

Demostración. Supongamos que $\ell > N + 1$ y se cumple (2.1). Por inducción basta mostrar que a puede ser representada como una combinación convexa de nada más $\ell - 1$ de los elementos a_i . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mu_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, \ell$. El núcleo del mapeo lineal

$$(x_1, x_2, \dots, x_{\ell}) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i a_i, \sum_{i=1}^{\ell} x_i \right)$$

de $\mathbb{R}^{\ell}$ en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ tiene dimensión positiva, ya que $\ell > N + 1$. Luego existe $(x_1, x_2, \dots, x_{\ell}) \neq 0$ tal que $\sum_{i=1}^{\ell} x_i a_i = 0$ y $\sum_{i=1}^{\ell} x_i = 0$. Sea $r := \max_{i=1}^{\ell} (|x_i|/\mu_i)$. Entonces $r > 0$. Sea i_0 tal que $r = |x_{i_0}|/\mu_{i_0}$. Definimos $s := \text{sign}(x_{i_0})/r$, así que $|sx_i| \leq \mu_i$ para todo i y $sx_{i_0} = \mu_{i_0}$. Definimos $\nu_i := \mu_i - sx_i \geq 0$, así que $a = \sum_{i=1}^{\ell} \nu_i a_i$ y $\sum_{i=1}^{\ell} \nu_i = 1$, es decir, a es una combinación convexa de los a_i con los pesos ν_i . Observamos que $\nu_{i_0} = 0$ y luego que a es una combinación convexa de a lo más $\ell - 1$ de los a_i . $\square$

2.4 Lema. *Sean E un espacio normado, $A \subseteq E$, $X \subseteq E$ finito y $\varepsilon > 0$ tales que $A \subseteq X + B_{\varepsilon}$. Si $\varepsilon_1 > \varepsilon$, entonces existe $Y \subseteq E$ finito tal que $\text{conv}(A) \subseteq Y + B_{\varepsilon_1}$.*

Demostración. Sea $x \in \text{conv}(A)$. Entonces existen $\ell \in \mathbb{N}$, $\mu_i \in [0, 1]$ y $x_i \in A$ para $i = 1, 2, \dots, \ell$ tales que $\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i = 1$ y $x = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i x_i$. Por la hipótesis podemos agarrar $y_i \in X$ tales que $|x_i - y_i| < \varepsilon$ para $i = 1, 2, \dots, \ell$. Se sigue que

$$x = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i y_i + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i (x_i - y_i) \subseteq \text{conv}(X) + B_{\varepsilon}.$$

Como esto se cumple para cualquier $x \in \text{conv}(A)$, obtenemos

$$(2.2) \quad \text{conv}(A) \subseteq \text{conv}(X) + B_\varepsilon.$$

Es claro que $\text{conv}(X)$ es compacta porque X es finito. Existe un conjunto finito $Y \subseteq E$ tal que $\text{conv}(X) \subseteq Y + B_{\varepsilon_1 - \varepsilon}$. Con (2.2) esto implica

$$\text{conv}(A) \subseteq \text{conv}(X) + B_\varepsilon \subseteq Y + B_{\varepsilon_1 - \varepsilon} + B_\varepsilon \subseteq Y + B_{\varepsilon_1}.$$

□

2.5 Proposición. Sean E un espacio de Banach y $A \subseteq E$ compacto. Entonces $\overline{\text{conv}(A)}$ es compacta. Si $\dim E < \infty$, $\text{conv}(A)$ es compacta.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como A es compacto, existe un conjunto finito $X \subseteq E$ tal que $A \subseteq X + B_{\varepsilon/2}$. Por el Lema 2.4 existe $Y \subseteq E$ finito tal que $\text{conv}(A) \subseteq Y + B_\varepsilon$. Como ε era arbitrariamente chico se muestra fácilmente, usando sucesiones, que $\overline{\text{conv}(A)}$ es compacta.

Si $\dim E < \infty$, el Lema 2.3 dice que todos elementos de $\text{conv}(A)$ son combinaciones convexas de $\dim E + 1$ elementos de A . Esta información permite demostrar fácilmente que $\text{conv}(A)$ es compacta. □

2.6 Lema. Sean E un espacio de Hilbert, K un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de E , y $x_0 \in E \setminus K$. Entonces existe $\Lambda \in E^*$ tal que

$$\Lambda v > \Lambda x_0 \quad \text{para toda } v \in K.$$

Demostración. Podemos suponer que $x_0 = 0$. Por el teorema de aproximación única aplicado al punto 0 existe un y sólo un $v_0 \in K$ tal que

$$(2.3) \quad \|v_0\| = \min_{v \in K} \|v\|.$$

Como $0 \notin K$, $v_0 \neq 0$. Mostremos que

$$(2.4) \quad \langle v, v_0 \rangle \geq \|v_0\|^2 \quad \text{para toda } v \in K.$$

Si $v \in K \setminus \{v_0\}$ y $t \in [0, 1]$,

$$(2.5) \quad \|v_0\|^2 \leq \|(1-t)v + tv_0\|^2 = (1-t)^2\|v\|^2 + t(1-t)\langle v, v_0 \rangle + t^2\|v_0\|^2$$

por la convexidad de K . Pongamos

$$t := \frac{\|v\|^2 - \|v_0\|^2}{\|v\|^2} \in (0, 1).$$

Con este t (2.5) implica (2.4) por un cálculo sencillo. Ahora basta definir $\Lambda x := \langle x, v_0 \rangle$, por (2.4) y porque $v_0 \neq 0$. □

En un espacio de Hilbert el espacio dual E^* *separa puntos*, es decir, si $x, y \in E$ son elementos distintos, existe $\Lambda \in E^*$ tal que $\Lambda x \neq \Lambda y$. Este hecho es una consecuencia del teorema de representación de Frechet-Riesz, ya que basta agarrar el funcional Λ relacionado con el elemento $x - y$. La importancia de esa noción es que si $\Lambda x = 0$ para todo $\Lambda \in E^*$, entonces $x = 0$.

2.7 Teorema (Integral de Bochner). *Sean E un espacio de Hilbert, $a \leq b$ y $f: [a, b] \rightarrow E$ continua. Entonces existe un y sólo un elemento $y \in E$ tal que*

$$(2.6) \quad \Lambda y = \int_a^b \Lambda f(s) \, ds$$

para todo $\Lambda \in E^*$. Ese elemento y será llamado la integral de f sobre $[a, b]$:

$$\int_a^b f(s) \, ds := y.$$

Si $a < b$,

$$(2.7) \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b f(s) \, ds \in \overline{\text{conv}(f[a, b])}.$$

Demostración. Primero demostremos la unicidad. Sean entonces y_1, y_2 dados con la propiedad (2.6). Eso implica $\Lambda[y_1 - y_2] = 0$ para todo $\Lambda \in E^*$. Como E^* separa puntos de E , se tiene $y_1 = y_2$.

Mostremos la existencia de y . Si $a = b$, escogemos $y = 0$. Si $a = 0$ y $b = 1$, ponemos

$$K := \overline{\text{conv}(f[0, 1])}.$$

Por la continuidad de f y por la Proposición 2.5 K es compacto.

Sea $D = \{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_\ell\} \subseteq E^*$ un conjunto finito de funcionales lineales. Denotemos

$$K_D := \{y \in K \mid (2.6) \text{ es cierto para todo } \Lambda \in D\}$$

y mostremos que K_D no es vacío. Definimos el mapeo $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{B}(E, \mathbb{R}^\ell)$ por

$$\tilde{\Lambda}x := (\Lambda_1 x, \Lambda_2 x, \dots, \Lambda_\ell x)$$

y $g := \tilde{\Lambda}f$. Como g es continua, $g[0, 1]$ es compacto. La Proposición 2.5 implica que $L := \text{conv}(g[0, 1])$ es un conjunto compacto. Definimos

$$z_i := \int_0^1 g_i(s) \, ds$$

y $z := (z_1, z_2, \dots, z_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$.

Demostremos que

$$(2.8) \quad z \in L.$$

Si no fuera cierto, por la convexidad y compacidad de L y por el Lema 2.6 existiría $\Gamma: \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $\Gamma x > \Gamma z$ para todo $x \in L$. Existirían coeficientes c_i tales que $\Gamma x = \sum_{i=1}^\ell c_i x_i$ para todo $x \in \mathbb{R}^\ell$, es decir,

$$\sum_{i=1}^\ell c_i g_i(t) > \sum_{i=1}^\ell c_i z_i$$

para todo $t \in [0, 1]$. Integrar esta desigualdad sobre $[0, 1]$ implicaría

$$\sum_{i=1}^\ell c_i z_i > \sum_{i=1}^\ell c_i z_i,$$

una contradicción. Eso comprueba (2.8).

(2.8) implica la existencia de $t_j \in [0, 1]$ y $\mu_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, con $\sum_{j=1}^m \mu_j = 1$ y

$$z = \sum_{j=1}^m \mu_j g(t_j).$$

Para

$$y := \sum_{j=1}^m \mu_j f(t_j) \in \text{conv}(f[0, 1])$$

obtenemos $\tilde{\Lambda}y = z$, es decir, (2.6) se cumple para $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_\ell$. Eso muestra que K_D no es vacío.

Consideramos la colección

$$\mathcal{D} := \{D \subseteq E^* \mid D \text{ es finito}\}.$$

Como $K_{D_1} \cap K_{D_2} = K_{D_1 \cup D_2}$ para $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, lo antes mostrado implica que

$$(2.9) \quad \text{toda intersección finita de conjuntos } K_D, D \in \mathcal{D}, \text{ es no vacía.}$$

Notemos también que todo K_D es cerrado por la continuidad de los elementos de E^* . Si

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} K_D$$

fuera vacía, la colección

$$\{K \setminus K_D \mid D \in \mathcal{D}\}$$

sería una cubierta abierta de K . Por la compacidad de K existiría una subcubierta finita de ella, en contradicción con (2.9). Eso comprueba que podemos escoger

$$y \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} K_D,$$

así que (2.6) se cumple para todo $\Lambda \in E^*$ y (2.7) se cumple.

En el caso general $a < b$, definimos

$$\int_a^b f(s) \, ds := (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)s) \, ds.$$

Es fácil comprobar (2.6) se cumple para todo $\Lambda \in E^*$ y (2.7), usando el teorema de transformación de variable para la integral en $\mathbb{R}$. $\square$

2.8 Proposición. *Si E, F son espacios de Hilbert, $A \in \mathcal{B}(E, F)$ y $f: [a, b] \rightarrow E$ es continua, se cumplen*

$$(2.10) \quad \left\| \int_a^b f(s) \, ds \right\| \leq \int_a^b \|f(s)\| \, ds.$$

y

$$(2.11) \quad A \int_a^b f(s) \, ds = \int_a^b A f(s) \, ds.$$

Demostración. Ponemos $y := \int_a^b f(s) \, ds$. Si $y = 0$, la primera desigualdad es trivial. Sea entonces $y \neq 0$, y sea $\Lambda \in E^*$ el funcional dado por el teorema de Frechet-Riesz para el elemento $y/\|y\|$. Se tiene que $\|\Lambda\| = 1$ y luego que $|\Lambda f(s)| \leq \|f(s)\|$ para todo $s \in [a, b]$. Eso implica

$$\|y\| = \Lambda y = \int_a^b \Lambda f(s) \, ds \leq \int_a^b \|f(s)\| \, ds.$$

La otra identidad es una consecuencia de (2.6) y del hecho que $\Lambda A \in E^*$ para todo $\Lambda \in F^*$. $\square$

2.2. Existencia y unicidad para ecuaciones ordinarias

2.9 Lema (El lema de Gronwall). *Sea J un intervalo que contiene 0, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$ y $u \in C(J)$ una función no negativa. Si*

$$(2.12) \quad u(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_0^t u(s) \, ds \right| \quad \text{para toda } t \in J,$$

entonces

$$(2.13) \quad u(t) \leq \alpha e^{\beta|t|} \quad \text{para toda } t \in J.$$

Demostración. Primero sea $t \geq 0$. Definimos $\varphi(t) := \beta \int_0^t u(s) ds$. La desigualdad (2.12) implica que

$$(2.14) \quad \dot{\varphi}(t) = \beta u(t) \leq \alpha\beta + \beta\varphi(t).$$

Multiplicar esta desigualdad por $e^{-\beta t}$ da

$$\frac{d}{dt}(e^{-\beta t}\varphi(t)) = e^{-\beta t}\dot{\varphi}(t) - \beta e^{-\beta t}\varphi(t) \leq e^{-\beta t}\alpha\beta.$$

Después de una integración de 0 a t obtenemos, recordando que $\varphi(0) = 0$,

$$e^{-\beta t}\varphi(t) \leq \alpha(1 - e^{-\beta t}),$$

y luego por (2.12)

$$u(t) \leq \alpha + \varphi(t) \leq \alpha(1 + e^{\beta t} - 1) = \alpha e^{\beta t},$$

es decir, (2.13). La demostración para $t < 0$ es análoga, cambiando signos donde sea necesario. $\square$

Sea E un espacio de Hilbert. Si J es un intervalo abierto y $u: J \rightarrow E$ diferenciable, se tiene $u': J \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}, E)$. Para $t \in J$ escribimos $\dot{u}(t) := u'(t)[1] \in E$, así que $\dot{u}: J \rightarrow E$.

Sean $f: E \rightarrow E$ continua y $x \in E$. Consideremos el problema de Cauchy (la ecuación diferencial ordinaria con valor inicial)

$$(2.15) \quad \begin{cases} \dot{u}(t) = f(u(t)) \\ u(0) = x. \end{cases}$$

Nos encargaremos de contestar la pregunta ¿Existe un intervalo J que contiene 0 y un mapeo diferenciable $u: J \rightarrow E$ tal que u es una solución de (2.15)?

2.10 Lema. *Si J es un intervalo con $0 \in J$ y $u: J \rightarrow E$ es continua, u es una solución de (2.15) en J si y sólo si*

$$(2.16) \quad u(t) = x + \int_0^t f(u(s)) ds \quad \text{para todo } t \in J.$$

Demostración. Basta usar (2.6) y el teorema fundamental del cálculo. $\square$

2.11 Lema (Unicidad local). *Sea f localmente Lipschitz continua. Si J_1 y J_2 son intervalos abiertos tales que $0 \in J_1 \cap J_2$, y si u_i es una solución de (2.15) en J_i , $i = 1, 2$, entonces $u_1 = u_2$ en $J_1 \cap J_2$.*

Demostración. Sea $I \subseteq J_1 \cap J_2$ un intervalo compacto tal que $0 \in I$. Por continuidad de u el conjunto $K := u_1(I) \cup u_2(I)$ es compacto. Por consiguiente, existe $M \geq 0$ tal que $\|f(y) - f(z)\| \leq M\|y - z\|$ si $y, z \in K$. Se sigue que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \int_0^t \|f(u_1(s)) - f(u_2(s))\| \, ds \leq M \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\| \, ds$$

para todo $t \in I$. Luego el Lema de Gronwall, Lema 2.9, implica que $\|u_1(t) - u_2(t)\| = 0$ para todo $t \in I$. $\square$

2.12 Lema (Existencia local). *Sea f localmente Lipschitz continua. Para todo $x \in E$ existe $\varepsilon > 0$ tal que (2.15) tiene una solución en $[-\varepsilon, \varepsilon]$.*

Demostración. Escogemos $R > 0$ tal que f es Lipschitz continua en $\overline{B}_R(x)$ con constante L . Sean $M := \sup_{y \in \overline{B}_R(x)} \|f(y)\|_E$ y $\varepsilon := \min\{R/M, 1/(2L)\}$. Poniendo $J := [-\varepsilon, \varepsilon]$ consideramos el espacio de Banach $F := C(J, E)$ con $\|u\|_F := \max_{t \in J} \|u(t)\|_E$. Definimos el operador $K := F \rightarrow F$ por

$$K(u)(t) := x + \int_0^t f(u(s)) \, ds$$

y mostremos que K tiene un punto fijo, es decir, una solución de (2.15) por el Lema 2.10.

Consideramos x como el mapeo constante, un elemento de F . Si $u \in B := \overline{B}_R(x; F)$ y $t \in I$,

$$\|K(u)(t) - x\|_E \leq \int_0^{|t|} \|f(u(s))\|_E \, ds \leq \varepsilon M \leq R,$$

es decir, $\|K(u) - x\|_F \leq R$ y luego $u \in B$. Si $u_1, u_2 \in B$, entonces

$$\begin{aligned} \|K(u_1)(t) - K(u_2)(t)\|_E &\leq \int_0^{|t|} \|f(u_1(s)) - f(u_2(s))\|_E \, ds \\ &\leq \varepsilon L \|u_1 - u_2\|_F \leq \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_F, \end{aligned}$$

es decir, $\|K(u_1) - K(u_2)\|_F \leq \|u_1 - u_2\|_F/2$. Estos dos hechos muestran que K es una contracción en B . Por el teorema de punto fijo de Banach existe un punto fijo de K en B . $\square$

2.13 Teorema (Existencia y unicidad). *Sea f localmente Lipschitz continua. Para todo $x \in E$ existen $T^+(x), T^-(x) \in (0, \infty]$ tales que para $\mathcal{I}(x) := (-T^-(x), T^+(x))$ existe una y sólo una solución u de (2.15) en $\mathcal{I}(x)$, y ella no puede ser extendida a tiempos más largos. Si $\|f(u(t))\|$ queda acotada uniformemente para $t \in [0, T^+(x))$, entonces $T^+(x) = \infty$. Un enunciado análogo es cierto para tiempos negativos.*

Demostración. Por el Lema 2.12

$$T^+(x) := \sup\{T > 0 \mid \text{existe una solución de (2.15) en } [0, T]\}$$

es positiva.

Mostremos la unicidad de la solución en todo $[0, T^+(x))$. Sean u_1, u_2 dos soluciones de (2.15) en $[0, T^+(x))$. El conjunto $U \subseteq [0, T^+(x))$ donde coinciden u_1 y u_2 es relativamente abierto por la unicidad local de soluciones, y es relativamente cerrado por la continuidad de u_1 y u_2 . En seguida, $U = [0, T^+(x))$.

Si $T^+(x) < \infty$ y si u fuera extensible continuamente a $[0, T^+(x)]$, entonces existiría una solución v del problema

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = f(v(t)) \\ v(0) = u(T^+(x)) \end{cases}$$

en un intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Es fácil ver, usando el Lema 2.10, que en ese caso el mapeo

$$w(t) := \begin{cases} u(t) & t \in [0, T^+(x)] \\ v(t - T^+(x)) & t \in (T^+(x), T^+(x) + \varepsilon) \end{cases}$$

sería una solución en $[0, T^+(x) + \varepsilon)$, en contradicción con la definición de $T^+(x)$. Eso muestra que u no es extensible a $T^+(x)$. El mismo argumento aplica para $T^-(x)$.

Supongamos ahora que existe $M \geq 0$ tal que $\|f(u(t))\| \leq M$ para toda $t \in I := [0, T^+(x))$. Tenemos para $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \leq t_2$, que

$$\|u(t_1) - u(t_2)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(u(s))\| ds \leq M|t_2 - t_1|,$$

así que u es globalmente Lipschitz continua en I . Si $T^+(x) < \infty$ fuera cierto, un ejercicio sencillo de análisis mostraría que u tendría una extensión Lipschitz continua a $\bar{I}$. Como antes obtendríamos una contradicción con la definición de $T^+(x)$. Eso muestra que $T^+(x) = \infty$ si f queda acotada a lo largo de la semiórbita positiva $u(I)$. El mismo argumento aplica para tiempos negativos. $\square$

2.14 Proposición. *Si además de ser localmente Lipschitz continua f es linealmente acotada en la situación del Teorema 2.13, es decir,*

$$(2.17) \quad \sup_{x \in E} \frac{\|f(x)\|}{1 + \|x\|} < \infty,$$

entonces $\mathcal{I}(x) = \mathbb{R}$ para toda $x \in E$.

Demostración. Supongamos que existe $C \geq 0$ tal que

$$(2.18) \quad \|f(x)\| \leq C(1 + \|x\|) \quad \text{para toda } x \in E.$$

Si $T^+(x) < \infty$ fuera cierto para algún $x \in E$,

$$\|u(t)\| \leq \|x\| + \int_0^t \|f(u(s))\| ds \leq \|x\| + CT^+(x) + C \int_0^t \|u(s)\| ds$$

para todo $t \in I := [0, T^+(x))$. El lema de Gronwall, Lema 2.9, implicaría que $\|u(t)\|$ quedaría acotada en I . Otra vez aplicando (2.18) obtendríamos que f quedaría acotada a lo largo de la solución $u(t)$ para $t \in [0, T^+(x))$. Pero el Teorema 2.13 diría en esta situación que $T^+(x) = \infty$. ¡Contradicción! El mismo argumento aplica para $T^-(x)$. $\square$

2.3. Propiedades del flujo

Sean E un espacio de Hilbert y $f: E \rightarrow E$ localmente Lipschitz continua. Definimos

$$\mathcal{D} := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times E \mid t \in \mathcal{I}(x)\}$$

y denotemos por $\sigma(t, x)$ el elemento $u(t)$, donde $(t, x) \in \mathcal{D}$ y u es la solución de (2.15). El mapeo σ es el *flujo (local) inducido por f* . Si f es linealmente acotada, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times E$ por el Teorema 2.13 y σ se llama un *flujo global*.

Como en la demostración del Teorema 2.13 se muestra que si $(s, x), (s + t, x) \in \mathcal{D}$, entonces $(t, \sigma(s, x)) \in \mathcal{D}$ y

$$(2.19) \quad \sigma(t, \sigma(s, x)) = \sigma(t + s, x).$$

Se tiene que

$$(2.20) \quad \sigma(0, x) = x \quad \text{para todo } x \in E.$$

2.15 Teorema. *El dominio $\mathcal{D}$ de tal flujo σ es abierto y σ es un mapeo localmente Lipschitz continuo. Además, las funciones T^+ y T^- son inferiormente semicontinuas.*

Demostración. Fijemos $(t^*, x^*) \in \mathcal{D}$ tal que $t^* \geq 0$. El caso de $t^* < 0$ se puede tratar de manera análoga. También fijemos $\bar{t} \in (t^*, T^+(x^*))$ y pongamos $J := [0, \bar{t}]$. Todo $y \in K := \sigma(J, x^*)$ tiene una vecindad abierta y acotada tal que la restricción de f a ella es Lipschitz continua. Cubramos el conjunto compacto K con un número finito de tales vecindades abiertas y denotemos por U su unión, un conjunto abierto y acotado. Resulta que f es uniformemente Lipschitz continua en $\bar{U}$. Existen $L, M \geq 0$ tales que

$$(2.21) \quad \|f(x)\| \leq L \quad \text{y} \quad \|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\| \quad \text{para todo } x, y \in \bar{U}.$$

Si $t \geq 0$ y $(t, x_i) \in \mathcal{D}$ son tales que $\sigma([0, t], x_i) \subseteq \bar{U}$, $i = 1, 2$, entonces por el Lema 2.10

$$\begin{aligned} \|\sigma(t, x_1) - \sigma(t, x_2)\| &\leq \|x_1 - x_2\| + \int_0^t \|f(\sigma(s, x_1)) - f(\sigma(s, x_2))\| ds \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + M \int_0^t \|\sigma(s, x_1) - \sigma(s, x_2)\| ds. \end{aligned}$$

El lema de Gronwall implica que en ese caso

$$(2.22) \quad \|\sigma(t, x_1) - \sigma(t, x_2)\| \leq e^{Mt} \|x_1 - x_2\|.$$

Denotemos

$$\rho := \text{dist}(K, E \setminus U) > 0 \quad \text{y} \quad \varepsilon := \frac{\rho}{2e^{M\bar{t}}}.$$

Mostremos que

$$(2.23) \quad T^+(x) > \bar{t} \quad \text{y} \quad \sigma(J, x) \subseteq U \quad \text{para } x \in B_\varepsilon(x^*).$$

Fijemos $x \in B_\varepsilon(x^*) \subseteq U$. Si existiera $t \in J \cap \mathcal{I}(x)$ tal que $\sigma(t, x) \in \partial U$ y $\sigma([0, t], x) \subseteq U$, tendríamos por (2.22)

$$\rho \leq \|\sigma(t, x) - \sigma(t, x^*)\| \leq e^{Mt} \|x - x^*\| \leq e^{M\bar{t}} \varepsilon = \frac{\rho}{2},$$

una contradicción. Entonces no existe tal t y hemos mostrado

$$(2.24) \quad \sigma(J \cap \mathcal{I}(x), x) \subseteq U.$$

Si $T^+(x) > \bar{t}$ no fuera cierto, (2.24) implicaría $\sigma([0, T^+(x)), x) \subseteq U$, es decir, $f(u(t))$ quedaría acotado para $t \in [0, T^+(x))$, por (2.21). Pero el Teorema 2.13 diría en ese caso que $T^+(x) = \infty$, una contradicción. Por consiguiente, $T^+(x) > \bar{t}$ sí es cierto, y (2.23) se sigue de (2.24).

La ecuación (2.23) implica que $J \times B_\varepsilon(x^*)$ es una vecindad de (t^*, x^*) en $\{(t, x) \in \mathcal{D} \mid t \geq 0\}$. Para cualquier $t \in J$ y $x, y \in B_\varepsilon(x^*)$ (2.22) y (2.23) implican

$$(2.25) \quad \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq e^{M\bar{t}} \|x - y\|,$$

es decir, σ es uniformemente Lipschitz continua en el segundo argumento en $J \times B_\varepsilon(x^*)$. Para cualquier $t_1 \leq t_2$, $t_1, t_2 \in J$, $x \in B_\varepsilon(x^*)$, tenemos por (2.21) y (2.23)

$$\|\sigma(t_2, x) - \sigma(t_1, x)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(\sigma(s, x))\| ds \leq M|t_2 - t_1|,$$

es decir, σ es uniformemente Lipschitz continua en el primer argumento en $J \times B_\varepsilon(x^*)$. Es muy fácil juntar estos hechos para mostrar que luego σ es uniformemente Lipschitz continua respecto a ambos argumentos en $J \times B_\varepsilon(x^*)$.

Por como escogimos $\bar{t}$ la ecuación (2.23) implica que T^+ es inferiormente semicontinua en x^* . Argumentos análogos aplican al caso $t^* < 0$ y para T^- . Es fácil ver que estos hechos implican que existe una vecindad de (t^*, x^*) en E que está incluida en $\mathcal{D}$. Como $(t^*, x^*) \in \mathcal{D}$ era arbitrario, $\mathcal{D}$ es abierto, es decir, demostramos todos los enunciados del teorema. $\square$

2.16 Proposición. *Sea $f: E \rightarrow E$ localmente Lipschitz continua y linealmente acotada (c.f. (2.17)). Entonces el flujo σ generado por f es global, y $\sigma(t, \cdot)$ es un homeomorfismo de E para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Que el flujo es global es una consecuencia de la Proposición 2.14. Las ecuaciones (2.19) y (2.20) dicen que $\sigma(-t, \cdot)$ es la inversa continua de $\sigma(t, \cdot)$ en E . $\square$

3. El teorema del paso de montaña

En esta sección cambiamos la notación para adaptarla a las notas de Mónica. Sean E un espacio de Hilbert y $J: E \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces continuamente diferenciable. Mostraremos un teorema minimax general, es decir, sobre existencia de puntos críticos de J que no son extremos si no puntos silla.

3.1 Teorema (Teorema de deformación). *Sean $c \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Supóngase que*

$$(3.1) \quad (1 + \|u\|)\|\nabla J(u)\| \geq 2\varepsilon \quad \text{para toda } u \in J^{-1}[c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon].$$

Entonces existe $\eta \in C(E, E)$ tal que

$$(I) \quad \eta(u) = u \text{ para todo } u \in E \setminus J^{-1}[c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon];$$

$$(II) \quad \eta(J^{c+\varepsilon}) \subseteq J^{c-\varepsilon}.$$

Demostración. Ponemos

$$A := E \setminus J^{-1}(c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon), \quad B := J^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$$

y definimos $\rho: E \rightarrow [0, 1]$ por

$$\rho(u) := \frac{\text{dist}(u, A)}{\text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B)}.$$

Se tiene que A y B son cerrados y $A \cap B = \emptyset$. Luego $\text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B) \neq 0$ en E . Como la función que mide la distancia de un punto a un conjunto es Lipschitz continua, ρ es localmente Lipschitz continua. Además, $\rho \equiv 0$ en A y $\rho \equiv 1$ en B . Sea $\chi: E \rightarrow E$ dado por

$$\chi(u) := \begin{cases} 0 & u \in A, \\ -\rho(u) \frac{\nabla J(u)}{\|\nabla J(u)\|^2} & u \in E \setminus A. \end{cases}$$

Dado que J está en $C^2(E)$, ∇J es un mapeo localmente Lipschitz continuo. Además, $\nabla J(u) \neq 0$ en $E \setminus A$ por (3.1). Estos hechos implican que χ es localmente Lipschitz continua. Usando (3.1) vemos que χ es linealmente acotada:

$$\frac{\|\chi(u)\|}{1 + \|u\|} \leq \frac{1}{(1 + \|u\|)\|\nabla J(u)\|} \leq \frac{1}{2\varepsilon}$$

para toda $u \in E \setminus A$. La misma desigualdad es trivialmente cierta para $u \in A$.

Sea σ el flujo global inducido por el campo vectorial χ según el Teorema 2.15 y la Proposición 2.16. Sea $\eta := \sigma(2\varepsilon, \cdot)$. Como $\chi \equiv 0$ en A , todas soluciones con valores iniciales

en A son constantes, por la unicidad de soluciones. Eso implica (I). Para mostrar (II) calculamos con la regla de la cadena:

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt} J(\sigma(t, u)) = \langle \nabla J(\sigma(t, u)), \chi(\sigma(t, u)) \rangle = -\rho(\sigma(t, u)) \leq 0.$$

Por consiguiente, $t \mapsto J(\sigma(t, u))$ es decreciente para todo $u \in E$.

Sea $u \in J^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$. Si no fuera cierto $J(\eta(u)) \leq c - \varepsilon$, por la monotonía tendríamos

$$(3.3) \quad c - \varepsilon < J(\sigma(t, u)) \leq c + \varepsilon,$$

es decir, $\sigma(t, u) \in B$, para toda $t \in [0, 2\varepsilon]$. Como $\rho \equiv 1$ en B , ese hecho implicaría junto con (3.2)

$$J(\eta(u)) = J(u) + \int_0^{2\varepsilon} \frac{d}{dt} J(\sigma(t, u)) dt = J(u) - 2\varepsilon \leq c - \varepsilon,$$

en contradicción con (3.3). Hemos mostrado (II). $\square$

3.2 Definición. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $(u_n) \subseteq E$. (u_n) es una *sucesión de Cerami en c* , en corto una *sucesión $(C)_c$* , si

$$J(u_n) \rightarrow c \quad \text{y} \quad (1 + \|u_n\|) \|\nabla J(u_n)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

El funcional J cumple la condición $(C)_c$ si toda sucesión $(C)_c$ tiene una subsucesión convergente. J cumple la condición (C) si J cumple $(C)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

3.3 Nota. Toda sucesión $(C)_c$ es una sucesión $(PS)_c$, así que la condición $(PS)_c$ es una condición más demandante que $(C)_c$.

3.4 Teorema (Teorema del paso de la montaña). *Sean $r > 0$ y $u_0 \in E$ tales que $\|u_0\| > r$*

$$(3.4) \quad b := \inf_{u \in S_r E} \|J(u)\| > J(0) \geq J(u_0).$$

Denotemos

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0, 1], E) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_0\}$$

y

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} J(\gamma(t)).$$

Si J satisface la condición $(C)_c$, c es un nivel crítico de J .

Demostración. Primero mostremos que $\infty > c \geq b$. Sea $\gamma \in \Gamma$. El mapeo $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) := \|\gamma(t)\|$ es continuo y satisface $g(0) = 0$ y $g(1) > r$. Por el teorema del valor intermedio existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $\|\gamma(t_0)\| = r$, es decir, $\gamma(t_0) \in S_r E$. Por lo tanto $\infty > \max_{t \in [0, 1]} J(\gamma(t)) \geq b$ y luego $\infty > c \geq b$.

Si existiera $\varepsilon > 0$ tal que

$$(3.5) \quad (1 + \|u\|)\|\nabla J(u)\| \geq 2\varepsilon \quad \text{para toda } u \in J^{-1}[c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon],$$

tendríamos un $\eta \in C(E, E)$ tal que $\eta(u) = u$ para todo $u \in E \setminus J^{-1}[c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]$ y $\eta(J^{c+\varepsilon}) \subseteq J^{c-\varepsilon}$, por el Teorema 3.1. Podríamos suponer que ε es tan chico que $c - 2\varepsilon > J(0)$, ya que $c \geq b > J(0)$. Por la definición de c existiría $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma[0, 1] \subseteq J^{c+\varepsilon}$. Como $0, u_0 \in E \setminus J^{-1}[c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]$, $\eta \circ \gamma \in \Gamma$. Pero $(\eta \circ \gamma)[0, 1] \subseteq J^{c-\varepsilon}$, en contradicción con la definición de c . Entonces no existe $\varepsilon > 0$ tal que (3.5) se cumple.

Supongamos que J satisfaga la condición $(C)_c$. Por lo que acabamos de demostrar, existen elementos $u_n \in E$ tales que $J(u_n) \in [c - 1/n, c + 1/n]$ y $(1 + \|u_n\|)\|\nabla J(u_n)\| \leq 1/n$. En consecuencia, (u_n) es una sucesión $(C)_c$ y tiene una subsucesión convergente a un $u^* \in E$. Pasando a esa subsucesión, tenemos en particular que $\nabla J(u_n) \rightarrow 0$, así que $\nabla J(u^*) = 0$ por la continuidad de ∇J . Por la continuidad de J tenemos $J(u^*) = c$. Eso concluye la demostración. $\square$

4. Aplicaciones a ecuaciones elípticas semilineales

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio acotado. Pongamos $2^* := \infty$ si $N = 1, 2$ y $2^* := 2N/(N - 2)$ si $N \geq 3$. 2^* es el *exponente crítico de Sobolev*. Consideramos una función f con las siguientes propiedades generales:

$$(H1) \quad f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R});$$

$$(H2) \quad f(0) = f'(0) = 0;$$

$$(H3) \quad \text{existen } p \in (2, 2^*) \text{ y } C > 0 \text{ tales que } |f(t)| \leq C(1 + |t|^{p-1}) \text{ para toda } t \in \mathbb{R}.$$

Estamos interesados en demostrar existencia de una solución del problema elíptico

$$(4.1) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(u), & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$ y $\lambda_1(\Omega)$ es el primer valor propio de $-\Delta$ en Ω con condiciones de Dirichlet en la frontera.

Para describir la formulación variacional de ese problema, sea $E := H_0^1(\Omega)$ el espacio de Hilbert con la norma

$$\|u\|_E := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 \right)^{1/2}.$$

Denotemos

$$F(t) := \int_0^t f(s) \, ds$$

para $t \in \mathbb{R}$ y

$$\Psi(u) := \int_{\Omega} f(u(x)) \, dx$$

para $u \in E$. Entonces Ψ es dos veces continuamente diferenciable, y se tiene

$$\Psi'(u)[v] = \int_{\Omega} f(u)v, \quad \Psi''(u)[v, w] = \int_{\Omega} f'(u)vw.$$

Las soluciones débiles de (4.1) son precisamente los puntos críticos del funcional

$$J(u) := \frac{1}{2} \|u\|_E^2 - \Psi(u).$$

Observemos que 0 es un punto crítico de J por (H2).

Pedimos la condición de Ambrosetti-Rabinowitz:

(H4) Existen $\mu > 2$ y $R > 0$ tales que $tf(t) \geq \mu F(t) > 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$ con $|t| \geq R$.

Ella implica que

$$(4.2) \quad tf(t) - \mu F(t) \geq -C$$

para toda $t \in \mathbb{R}$, con una constante $C \geq 0$. Además, resulta que

$$(4.3) \quad F(t) \geq C_1 |t|^\mu - C_2.$$

4.1 Teorema. *Bajo las condiciones (H1)–(H4) el problema (4.1) tiene una solución no trivial.*

Demostración. Primero demostremos que J cumple (C). Sea (u_n) una sucesión $(C)_c$ para algún $c \in \mathbb{R}$. Eso implica que

$$\|u_n\|^2 - \Psi'(u_n)u_n = J'(u_n)u_n = o(1).$$

Resulta para n grande que

$$\begin{aligned} c + 1 &\geq J(u_n) \\ &= \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \Psi(u_n) \\ &= \frac{1}{2} \Psi'(u_n)u_n - \Psi(u_n) + o(1) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \Psi'(u_n)u_n + o(1) + C \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 + o(1) + C. \end{aligned}$$

Como $\mu > 2$, (u_n) es acotada. Podemos representar Ψ' de la siguiente manera:

$$E \rightarrow L^p \xrightarrow{\Psi'} L^{p/p-1} \rightarrow E^*.$$

Por el teorema de Rellich Ψ' manda conjuntos acotados a conjuntos con cerradura compacta. Despues de pasar a una subsucesión podemos suponer que $(\nabla \Psi(u_n))$ converge en E . En consecuencia,

$$u_n = \nabla J(u_n) + \nabla \Psi(u_n)$$

converge. Eso demuestra $(C)_c$.

Como $\Psi''(0) = 0$, J se comporta esencialmente como $\|u\|^2/2$ cerca de 0. Existe $r > 0$ chico tal que $\inf_{\|u\|=r} J(u) > 0$. Agarramos cualquier $v_0 \in E \setminus \{0\}$. Para $t \geq 0$ tenemos

$$J(tv_0) \leq \frac{1}{2}\|v_0\|^2 t^2 - C_1|v_0|_\mu^\mu t^\mu + C_2|\Omega| \rightarrow -\infty$$

cuando $t \rightarrow \infty$. Escogemos $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que $u_0 := t_0 v_0$ cumple $J(u_0) \leq 0$ y $\|u_0\| > r$.

Hemos mostrado que J cumple todos los requisitos del Teorema 3.4. $\square$