

Métodos variacionales en ecuaciones diferenciales parciales

Mónica Clapp
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Semestre 2016-2
Febrero-Mayo 2016

Índice general

1. Introducción	1
2. El principio de Dirichlet	3
2.1. Preliminares	3
2.1.1. Integración por partes	3
2.1.2. Los espacios de Lebesgue	5
2.1.3. El teorema de representación de Fréchet-Riesz	6
2.2. Espacios de Sobolev	8
2.2.1. Motivación	8
2.2.2. Derivadas débiles	9
2.2.3. Espacios de Sobolev	10
2.3. Problemas elípticos con condición sobre la frontera	13
2.3.1. Un problema de Dirichlet homogéneo	13
2.3.2. Un problema de Dirichlet no homogéneo	16
2.4. El principio del máximo	17
3. Valores propios del laplaciano	19
3.1. Preliminares	19
3.1.1. Convergencia débil	19
3.1.2. Un teorema de minimización	21
3.1.3. La desigualdad de Sobolev	22
3.1.4. El teorema de Rellich-Kondrashov	25
3.2. Valores propios del laplaciano	27
4. La variedad de Nehari	33
4.1. Preliminares	33
4.1.1. Diferenciabilidad en espacios de Banach	33
4.1.2. El operador de Nemytskii	35
4.1.3. Variedades de Hilbert	39
4.2. Un problema de Dirichlet semilineal	41

4.2.1.	Formulación variacional del problema	41
4.2.2.	La gráfica del funcional de energía	42
4.2.3.	La variedad de Nehari	43
4.2.4.	Existencia de mínimos	45
4.2.5.	Existencia de soluciones positivas	47
5.	La teoría de Lusternik-Schnirelmann	49
5.1.	El flujo en variedades	49
5.1.1.	El problema de Cauchy	49
5.1.2.	El flujo gradiente negativo	51
5.2.	La categoría de Lusternik-Schnirelmann	51
5.2.1.	Motivación	51
5.2.2.	El teorema de Lusternik-Schnirelmann	53
5.3.	Multiplicidad de puntos críticos	55
5.3.1.	El lema de deformación	55
5.3.2.	El teorema de Lusternik-Schnirelmann en variedades de Hilbert	59
5.4.	Puntos críticos de funciones simétricas	62
5.4.1.	El lema de deformación simétrico	62
5.4.2.	El género de Krasnoselskii, simetrías y puntos críticos	63
5.4.3.	Calculando el género	66
5.5.	Infinidad de soluciones de un problema de Dirichlet semilineal	67
5.5.1.	La condición de Palais-Smale	68
5.5.2.	Infinidad de soluciones	70
5.6.	El principio variacional de Ekeland	70
5.7.	Conclusiones	70
5.7.1.	Perturbación de simetrías	71
5.7.2.	Falta de compacidad	72
6.	Problemas elípticos en dominios no acotados	73
6.1.	El problema autónomo	73
6.1.1.	Formulación variacional del problema	73
6.1.2.	Dominios simétricos	75
6.1.3.	Simetrías y compacidad	79
6.1.4.	El principio de criticalidad simétrica	83
6.1.5.	Infinidad de soluciones no radiales	86
6.2.	El estado fundamental en $\mathbb{R}^N$	88
6.2.1.	Existencia de un estado fundamental	88
6.2.2.	Simetría del estado fundamental	92
6.2.3.	No existencia de estados fundamentales en dominios exteriores	95
6.3.	Problemas no autónomos	98

6.3.1.	Formulación variacional del problema	98
6.3.2.	El Teorema de Lions	100
6.4.	La ecuación estacionaria de Schrödinger	103
7.	Problemas elípticos con exponente crítico	105
7.1.	Invariancia bajo dilataciones	105
7.2.	La identidad de Pohozaev	108
7.3.	Soluciones de energía mínima en $\mathbb{R}^N$	112
7.3.1.	Un fenómeno de explosión	112
7.3.2.	La burbuja estándar	121
7.4.	El problema de Brezis-Nirenberg	122
7.5.	Representación de sucesiones de Palais-Smale	128
7.6.	El problema de Bahri-Coron	134
7.6.1.	El baricentro	134
7.6.2.	Soluciones en dominios anulares	137

Capítulo 1

Introducción

Muchos fenómenos de la física, la ingeniería, la biología, la medicina, las finanzas, etc. se modelan mediante una ecuación diferencial, y muchos de estos modelos tienen una formulación variacional, es decir, las soluciones de la ecuación diferencial son los puntos críticos de un funcional, dado por una integral, en un espacio adecuado de funciones. Dicha integral representa alguna energía, una acción, una función de costo, etc.

Los problemas variacionales aparecen también en muchas áreas importantes de las matemáticas, por ejemplo, en la geometría riemanniana, donde las geodésicas resultan ser puntos críticos de un funcional de energía o donde problemas importantes, como el problema de Yamabe o el problema de la curvatura escalar prescrita, tienen una formulación variacional.

Para que el modelo en cuestión tenga sentido, lo primero es demostrar que tiene al menos una solución. Durante mucho tiempo se identificó al modelo con el fenómeno físico al que describía, y el hecho de que en la naturaleza existiese una distribución de equilibrio para algún problema físico se tomaba como evidencia suficiente para la existencia de un mínimo de la integral variacional asociada; consulta por ejemplo [24, p.232]. Hacia finales del siglo XIX Weierstrass mostró un ejemplo de un problema variacional que no admite una solución mínima [50]. Te lo proponemos aquí como ejercicio.

Ejercicio 1.1 Sean $\mathcal{C}^1[-1, 1]$ el espacio de las funciones reales continuamente diferenciables en el intervalo $[-1, 1]$, $V := \{u \in \mathcal{C}^1[-1, 1] : u(1) = 1, u(-1) = -1\}$ y

$$J(u) := \int_{-1}^1 |xu'(x)|^2 dx.$$

(a) *Prueba que $\inf\{J(u) : u \in V\} = 0$.* (Sugerencia: Considera las funciones

$$u_\varepsilon(x) := \frac{\arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\arctan\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}, \quad \varepsilon > 0.$$

Prueba que pertenecen a V y que $J(u_\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.)

(b) *Prueba que J no alcanza su mínimo en V .*

El primer objetivo del cálculo de variaciones consiste en demostrar que el problema variacional tiene al menos una solución. Interesa también estudiar si la solución es única o si existen muchas de ellas; decir algo acerca de su forma: si son funciones positivas, si cambian de signo, si tienen simetrías, etc. y acerca de su estabilidad, es decir, si se conservan bajo cambios pequeños de los datos del problema.

El punto de partida de los métodos variacionales es el principio de Dirichlet que establece que la solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

en un dominio acotado Ω de $\mathbb{R}^N$ es el mínimo de una integral - la integral de energía - en un cierto espacio de funciones. En este caso - si los datos del problema son suficientemente suaves - la solución existe y es única.

Si el problema es no lineal, por ejemplo,

$$\begin{cases} -\Delta u = u^3 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

la situación cambia drásticamente. La existencia o no de soluciones para este problema, y el número de éstas, dependen del dominio. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado y $N = 3$ este problema tiene una infinidad de soluciones. En cambio, si $N = 4$ y Ω es convexo, este problema no tiene más que la solución trivial.

Las soluciones de este problema son todos los puntos críticos - no son únicamente los mínimos - de un cierto funcional definido sobre una variedad de dimensión infinita. Alrededor del 1930 Lusternik y Schnirelmann mostraron que la complejidad topológica de una variedad tiene un efecto en el número de puntos críticos de cualquier función definida sobre ella. Este hecho fundamental ha jugado, y continúa jugando, un papel importantísimo en Matemáticas.

En estas notas estudiaremos los problemas arriba mencionados y otros problemas interesantes, y presentaremos una introducción a los métodos variacionales que se usan para abordar este tipo de problemas. Afortunadamente existe excelente literatura donde puedes aprender mucho más sobre este tema, por ejemplo, los libros [2, 18, 33, 49, 51].

Una lectura deliciosa es el libro de Hildebrand y Tromba [29], apto para ser disfrutado por todo público, no sólo por matemáticos.

Capítulo 2

El principio de Dirichlet

En este capítulo estudiaremos la existencia de soluciones del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un dominio en $\mathbb{R}^N$, $\partial\Omega$ denota a su frontera, $f, g : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas.

Un **dominio** es un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^N$. Δ es el **operador de Laplace** o **laplaciano** definido como

$$\Delta u := \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

2.1. Preliminares

Empezaremos introduciendo los conceptos y resultados que usaremos para abordar este problema.

2.1.1. Integración por partes

Ω denotará siempre a un dominio en $\mathbb{R}^N$. Para $k \geq 0$ denotaremos por

- $C^k(\Omega)$ al conjunto de funciones continuas $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que son k -veces continuamente diferenciables en Ω ,
- $C^k(\overline{\Omega})$ al conjunto de funciones continuas $\overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que son k -veces continuamente diferenciables en Ω y cada una de sus derivadas parciales de orden $\leq k$ tiene una extensión continua a la cerradura de Ω ,

- $\mathcal{C}^\infty(\Omega) := \cap_{k=1}^\infty \mathcal{C}^k(\Omega)$, $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) := \cap_{k=1}^\infty \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$,
- $\mathcal{C}_c^k(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega) : \text{sop}(\varphi) \text{ es compacto}\}$, donde
$$\text{sop}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$$

es el **soporte** de φ , $0 \leq k \leq \infty$.

Recordemos los siguientes resultados clásicos del cálculo.

Proposición 2.1 (a) FÓRMULA DE GAUSS. Si $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, entonces

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

(b) INTEGRACIÓN POR PARTES. Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, entonces

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi + \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

(c) FÓRMULA DE GREEN. Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, entonces

$$\int_{\Omega} (\Delta f) \varphi + \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla \varphi = 0.$$

Demostración: (a): Denotemos también por φ a la extensión de φ que vale 0 fuera de Ω . Entonces $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N)$ y $\text{sop}(\varphi) \subset [-r, r]^N$ para algún $r > 0$. Para simplificar la notación, supongamos que $i = 1$. El teorema fundamental del cálculo asegura que

$$\int_{-r}^r \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} dx_1 = \varphi(r, x_2, \dots, x_N) - \varphi(-r, x_2, \dots, x_N) = 0.$$

En consecuencia,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \int_{-r}^r \cdots \int_{-r}^r \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} dx_1 \cdots dx_N = 0.$$

Esto demuestra la afirmación (a). La afirmación (b) se obtiene aplicando (a) al producto $f\varphi$. La afirmación (c) se obtiene aplicando (b) a las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ y φ , y sumando las identidades obtenidas para $i = 1, \dots, N$. ■

2.1.2. Los espacios de Lebesgue

Consideramos la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ e identificamos a dos funciones si coinciden casi dondequiera (es decir, excepto en un subconjunto de medida cero de su dominio). Si $p \in [1, \infty)$ definimos

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y } |f|^p \text{ es integrable en } \Omega\}$$

y denotamos por

$$|f|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p} \quad \text{o por} \quad |f|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p} \quad (2.1)$$

a la norma en el espacio $L^p(\Omega)$.

Definición 2.2 *Un espacio vectorial normado (sobre $\mathbb{R}$) que es completo con la métrica dada por su norma se llama un **espacio de Banach**.*

La demostración de los siguientes resultados se encuentra, por ejemplo, en [11, 14, 32].

Teorema 2.3 *$L^p(\Omega)$ con la norma $|\cdot|_p$ es un espacio de Banach.*

Proposición 2.4 (Desigualdad de Hölder) *Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$|fg|_1 \leq |f|_p |g|_q.$$

Ejercicio 2.5 *Prueba que, si Ω es acotado y $1 < p < r < \infty$, entonces $L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ y*

$$|f|_p \leq |\Omega|^{(r-p)/rp} |f|_r \quad \forall f \in L^r(\Omega),$$

donde $|\Omega| := \int_{\Omega} 1$ es la medida de Lebesgue de Ω en $\mathbb{R}^N$.

Ejercicio 2.6 (Desigualdad de interpolación) *Sean $1 \leq p < s < r \leq \infty$. Prueba que, si $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, entonces $f \in L^s(\Omega)$ y se cumple que*

$$|f|_s \leq |f|_p^{1-\alpha} |f|_r^{\alpha}, \quad (2.2)$$

donde $\alpha \in (0, 1)$ satisface que $\frac{1}{s} = \frac{1-\alpha}{p} + \frac{\alpha}{r}$ si $r < \infty$ y $\alpha := 1 - \frac{p}{s}$ si $r = \infty$.

2.1.3. El teorema de representación de Fréchet-Riesz

Definición 2.7 *Un espacio vectorial H (sobre $\mathbb{R}$) con un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, que es completo respecto a la norma inducida*

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle},$$

*se llama un **espacio de Hilbert**.*

Observa que la norma $\|\cdot\|_2$ del espacio $L^2(\Omega)$ está inducida por el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} uv.$$

En consecuencia, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Si V es un subespacio vectorial de H , el **espacio ortogonal a V en H** se define como

$$V^{\perp} := \{w \in H : \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall v \in V\}.$$

Nota que $V \subset (V^{\perp})^{\perp}$. En general no es cierto que $V = (V^{\perp})^{\perp}$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejercicio 2.8 *Prueba que el espacio ortogonal a $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es $\{0\}$. (Sugerencia: Recuerda que $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$.) Concluye que $\mathcal{C}_c^0(\Omega) \neq (\mathcal{C}_c^0(\Omega)^{\perp})^{\perp}$.*

Sin embargo, se cumple lo siguiente.

Proposición 2.9 *Si V es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H entonces $V = (V^{\perp})^{\perp}$.*

Demostración: Consulta por ejemplo [14, 32]. ■

Ejercicio 2.10 *Prueba que, para cada $u_0 \in H$, la función $T_{u_0} : H \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$T_{u_0}(v) := \langle u_0, v \rangle$$

es lineal y continua. (Sugerencia: Usa la desigualdad de Cauchy-Schwarz.)

El siguiente resultado clásico del análisis funcional afirma que éstas son todas las funciones lineales y continuas de H en $\mathbb{R}$.

Teorema 2.11 (de representación de Fréchet-Riesz) *Si H es un espacio de Hilbert y $T : H \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal y continua, entonces existe un único $u_0 \in H$ tal que*

$$T(v) = \langle u_0, v \rangle \quad \forall v \in H. \quad (2.3)$$

Demostración: Sea $V := \ker T$. Como T es continua, V es un subespacio vectorial cerrado de H . Si $V = H$, entonces $T = 0$ y $u_0 = 0$ cumple (2.3). Si $V \neq H$, La Proposición 2.9 asegura que $V^\perp \neq \{0\}$. Escojemos $w_0 \in V^\perp$ tal que $\|w_0\| = 1$ y definimos

$$u_0 := (Tw_0)w_0.$$

Es un ejercicio sencillo demostrar que u_0 satisface las afirmaciones del teorema. Lo enunciamos a continuación. ■

Ejercicio 2.12 *Demuestra que el elemento u_0 que acabamos de definir es el único elemento de H tal que $T(v) = \langle u_0, v \rangle$ para todo $v \in H$.*

El vector u_0 del Teorema 2.11 satisface la siguiente propiedad de minimización.

Proposición 2.13 (Principio de Dirichlet) *Sea $T : H \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua. Entonces $u_0 \in H$ satisface*

$$T(v) = \langle u_0, v \rangle \quad \forall v \in H,$$

si y sólo si u_0 es un mínimo del funcional $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(v) := \frac{1}{2} \|v\|^2 - Tv.$$

Demostración: Si $T(v) = \langle u_0, v \rangle$ para todo $v \in H$, entonces

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u_0 + (v - u_0)) \\ &= \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \langle u_0, v - u_0 \rangle + \frac{1}{2} \|v - u_0\|^2 - T(u_0) - T(v - u_0) \\ &= J(u_0) + \frac{1}{2} \|v - u_0\|^2 \geq J(u_0) \end{aligned}$$

para todo $v \in H$. Por tanto u_0 es un mínimo de J .

Inversamente, supongamos que u_0 es un mínimo de J . Entonces, para cada $v \in H$, la función $J_v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$J_v(t) := J(u_0 + tv) = \frac{1}{2} \|u_0\|^2 - T(u_0) + [\langle u_0, v \rangle - T(v)]t + \frac{1}{2} \|v\|^2 t^2$$

tiene un mínimo en 0. En consecuencia,

$$0 = J'_v(0) = \langle u_0, v \rangle - T(v).$$

Es decir, $\langle u_0, v \rangle = Tv$ para todo $v \in H$. ■

2.2. Espacios de Sobolev

2.2.1. Motivación

Sea $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Queremos averiguar si existe una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que cumpla lo siguiente:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

Observa que, si u satisface $-\Delta u + u = f$, multiplicando esta ecuación por $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e integrando, obtenemos que

$$-\int_{\Omega} (\Delta u) \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Aplicando la fórmula de Green (Proposición 2.1) a la primera integral concluimos que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (2.5)$$

Podemos entonces empezar investigando si existe una función u que satisfaga esta igualdad.

Denotemos al lado izquierdo de la igualdad por

$$\langle u, \varphi \rangle_1 := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi. \quad (2.6)$$

Es sencillo comprobar que éste es un producto escalar en $C_c^\infty(\Omega)$. El lado derecho,

$$T\varphi := \int_{\Omega} f \varphi,$$

es una función lineal en φ . Además, la desigualdad de Hölder (Proposición 2.4) para $p = q = 2$ asegura que

$$|T\varphi| \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_2 \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_1 \quad (2.7)$$

donde

$$\|\varphi\|_1 := \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \int_{\Omega} \varphi^2 \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

es la norma inducida por el producto escalar (2.6). De la desigualdad (2.7) se sigue que $T : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Si $C_c^\infty(\Omega)$ con el producto escalar (2.6) fuese un espacio de Hilbert, el teorema de representación de Fréchet-Riesz nos daría la existencia de una función u satisfaciendo (2.5). Desafortunadamente no lo es.

Ejercicio 2.14 *Da un ejemplo de una sucesión de funciones $\varphi_k \in \mathcal{C}_c^\infty(-1, 1)$ que sea de Cauchy respecto a la norma*

$$\|\varphi\|_1 := \sqrt{\int_{-1}^1 (\varphi')^2 + \int_{-1}^1 \varphi^2}$$

y que no converja a una función en $\mathcal{C}^1[-1, 1]$ según esta norma.

2.2.2. Derivadas débiles

Vamos a construir un espacio de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ que contiene a $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ como subespacio denso. Empezaremos introduciendo una noción de derivada que extiende a la de derivada parcial.

Denotamos por

$$L_{loc}^1(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u|_\omega \in L^1(\omega) \quad \forall \text{abierto acotado } \omega \text{ con } \bar{\omega} \subset \Omega\},$$

donde $u|_\omega$ denota la restricción de u a ω .

Ejercicio 2.15 *Prueba que $L^p(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$ para todo $p \in [1, \infty)$. (Sugerencia: Usa el Ejercicio 2.5.)*

La fórmula de integración por partes motiva el siguiente concepto.

Definición 2.16 *Sea $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Decimos que u es **débilmente diferenciable en Ω** si existen $v_1, \dots, v_N \in L_{loc}^1(\Omega)$ tales que*

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\Omega} v_i \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \quad (2.9)$$

*para cada $i = 1, \dots, N$. La (única!) función v_i que cumple (2.9) se llama la ***i-ésima derivada débil de u en Ω*** y se denota*

$$D_i u := v_i.$$

*El **gradiente débil de u en Ω** es la función $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ cuyas componentes son las derivadas débiles. Se denota por*

$$\nabla u := (D_1 u, D_2 u, \dots, D_N u).$$

La afirmación del siguiente ejercicio es consecuencia inmediata de la Proposición 2.1.

Ejercicio 2.17 Prueba que, si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, entonces u es débilmente diferenciable en Ω y

$$D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

No todas las funciones débilmente diferenciables son diferenciables, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejercicio 2.18 Sea $u : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ la función $u(x) = |x|$. Prueba que u es débilmente diferenciable en $(-1, 1)$ y que su derivada débil es la función

$$v(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, 1), \\ -1 & x \in (-1, 0]. \end{cases}$$

El ejemplo siguiente muestra que hay funciones que no son débilmente diferenciables.

Ejercicio 2.19 Prueba que la función v del ejercicio anterior no es débilmente diferenciable en $(-1, 1)$.

Ejercicio 2.20 Prueba que la derivada débil es lineal, es decir, si $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ son débilmente diferenciables y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda u + \mu v$ es débilmente diferenciable y

$$D_i(\lambda u + \mu v) = \lambda D_i u + \mu D_i v \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Ejercicio 2.21 Prueba que, si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es débilmente diferenciable en Ω y $\Omega_0 \subset \Omega$, entonces $u|_{\Omega_0}$ es débilmente diferenciable en Ω_0 y

$$D_i(u|_{\Omega_0}) = (D_i u)|_{\Omega_0}.$$

Consulta, por ejemplo, [11, 14, 23, 32], para una discusión más detallada sobre las derivadas débiles y sobre los espacios de Sobolev, que definiremos a continuación.

2.2.3. Espacios de Sobolev

Definición 2.22 El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ se define como sigue:

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : u \text{ es débilmente diferenciable y } D_i(u) \in L^2(\Omega) \forall i = 1, \dots, N\}.$$

Si $u, v \in H^1(\Omega)$, definimos el producto escalar en $H^1(\Omega)$ como

$$\langle u, v \rangle_1 := \int_{\Omega} uv + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (D_i u)(D_i v) = \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v, \quad (2.10)$$

donde ∇u es el gradiente débil de u . La norma inducida por este producto escalar es

$$\|u\|_1 := \left(\int_{\Omega} u^2 + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (D_i u)^2 \right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.11)$$

Dado que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, el Ejercicio 2.17 asegura que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ y el producto escalar (2.10) coincide con el definido (2.6). Veamos que $H^1(\Omega)$ sí es completo.

Teorema 2.23 $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Demostración: Sea (u_n) en $H^1(\Omega)$ una sucesión de Cauchy respecto a la norma $\|\cdot\|_1$. Entonces las sucesiones (u_n) y $(D_i u_n)$ son de Cauchy en $L^2(\Omega)$ para toda $i = 1, \dots, N$. Como $L^2(\Omega)$ es completo, $u_n \rightarrow u$ y $D_i u_n \rightarrow v_i$ en $L^2(\Omega)$. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Usando la continuidad del producto escalar en $L^2(\Omega)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\Omega} v_i \varphi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (D_i u_n) \varphi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\Omega} (D_i u_n) \varphi \right) = 0, \end{aligned}$$

es decir, u es débilmente diferenciable y $v_i = D_i u$, para cada $i = 1, \dots, N$. Por tanto, $u \in H^1(\Omega)$. Además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_1^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n - u|^2 + \sum_{i=1}^N \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D_i u_n - D_i u|^2 = 0.$$

En consecuencia, $H^1(\Omega)$ es completo con la norma $\|\cdot\|_1$. ■

La función u del Ejercicio 2.18 pertenece a $H^1(-1, 1)$. Ello muestra que las funciones de $H^1(\Omega)$ no necesariamente se anulan sobre $\partial\Omega$, de modo que este espacio no es el adecuado para tratar el problema (2.4). Conviene considerar el siguiente subespacio.

Definición 2.24 El **espacio de Sobolev** $H_0^1(\Omega)$ se define como la cerradura de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega)$ resulta ser completo por ser un subespacio cerrado de un espacio completo. Es decir, $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert. En el caso particular en el que $\Omega = \mathbb{R}^N$ se tiene que $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$. Sin embargo $H_0^1(\Omega)$ no coincide en general con $H^1(\Omega)$.

Una propiedad importante de las funciones en $H_0^1(\Omega)$ es que su extensión trivial a $\mathbb{R}^N$ es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}^N$, más precisamente, se cumple lo siguiente.

Ejercicio 2.25 Prueba que, si $u \in H_0^1(\Omega)$, la función

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

pertenece a $H^1(\mathbb{R}^N)$ y se cumple que $D_i(\bar{u}) = \overline{D_i u}$ para $i = 1, \dots, N$.

Observación 2.26 El ejercicio anterior nos permite considerar a $H_0^1(\Omega)$ como un subespacio de $H^1(\mathbb{R}^N)$. En adelante denotaremos a $\bar{u}$ simplemente por u .

Ejercicio 2.27 Prueba que la función u del Ejercicio 2.18 no pertenece a $H_0^1(-1, 1)$.

Ejercicio 2.28 Prueba que, si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ y $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, entonces $u\varphi \in H_0^1(\Omega)$ y

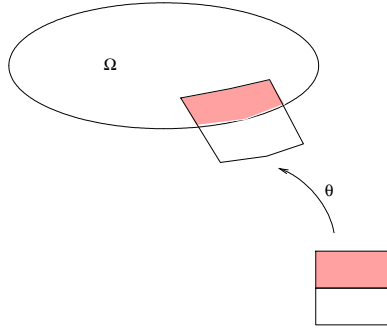
$$D_i(u\varphi) = (D_i u)\varphi + u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Intuitivamente podríamos pensar a $H_0^1(\Omega)$ como el espacio de las funciones de $H^1(\Omega)$ que se anulan sobre la frontera de Ω . Esta afirmación carece de sentido ya que los elementos de $H^1(\Omega)$ son clases de equivalencia de funciones que coinciden c.d. en Ω y $\partial\Omega$ tiene medida 0. Sin embargo, esta afirmación hace sentido para funciones en $H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ y resulta cierta si Ω es suficientemente suave.

Definición 2.29 Se dice que Ω es **de clase $\mathcal{C}^k$** si, para cada $x_0 \in \partial\Omega$, existe una vecindad abierta U de x_0 en $\mathbb{R}^N$ y un difeomorfismo $\vartheta : B_1^{N-1}(0) \times (-1, 1) \rightarrow U$ de clase $\mathcal{C}^k$ tal que $\vartheta(0, 0) = x_0$,

$$\vartheta(B_1^{N-1}(0) \times (0, 1)) = U \cap \Omega \quad \text{y} \quad \vartheta(B_1^{N-1}(0) \times \{0\}) = U \cap \partial\Omega.$$

donde $B_1^{N-1}(0) := \{y \in \mathbb{R}^{N-1} : |y| < 1\}$ es la bola unitaria en $\mathbb{R}^{N-1}$.



Teorema 2.30 Si Ω es de clase $\mathcal{C}^1$ y $u \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, entonces $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.

Demostración: Consulta por ejemplo [11, 14]. ■

Concluimos la sección con dos afirmaciones que usaremos más adelante y que te proponemos como ejercicio.

Ejercicio 2.31 *Prueba que, si $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces $|u| \in H_0^1(\Omega)$ y*

$$(D_i |u|)(x) = \begin{cases} D_i u(x) & \text{si } u(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } u(x) = 0 \\ -D_i u(x) & \text{si } u(x) \leq 0 \end{cases}$$

(Sugerencia: Considera las funciones $\zeta_\varepsilon(t) = (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, y prueba que $\zeta_\varepsilon \circ u \in H_0^1(\Omega)$. Después aplica el teorema de convergencia dominada de Lebesgue).

Dada $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definimos

$$u^+ := \max\{u, 0\} \in H_0^1(\Omega), \quad u^- := \min\{u, 0\} \in H_0^1(\Omega).$$

Ejercicio 2.32 *Prueba que, si $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces $u^+, u^- \in H_0^1(\Omega)$ y sus derivadas débiles son*

$$(D_i u^+)(x) = \begin{cases} D_i u(x) & \text{si } u(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } u(x) \leq 0 \end{cases}, \quad (D_i u^-)(x) = \begin{cases} D_i u(x) & \text{si } u(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } u(x) \geq 0 \end{cases}.$$

(Sugerencia: Observa que $u^+ = \frac{1}{2}(u + |u|)$ y $u^- = \frac{1}{2}(u - |u|)$).

2.3. Problemas elípticos con condición sobre la frontera

Dedicaremos esta sección al estudio de algunos problemas elípticos que satisfacen una condición prescrita sobre la frontera de Ω .

2.3.1. Un problema de Dirichlet homogéneo

Volvamos al problema (2.4): Dada una función $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, nos preguntamos si existe una función $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.12)$$

La condición $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ recibe el nombre de **condición de Dirichlet homogénea**.

Definición 2.33 *Una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface (2.12) se llama una **solución clásica** de (2.12).*

Observa que, si existe una solución clásica de (2.12), entonces forzosamente $f \in C^0(\overline{\Omega})$. En la subsección 2.2.1 probamos lo siguiente:

Proposición 2.34 Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ satisface $-\Delta u + u = f$, entonces

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Este resultado motiva la siguiente definición.

Definición 2.35 Una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad (2.13)$$

se llama una **solución débil** de (2.12).

Observa que el lado izquierdo de la igualdad (2.13) es el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_1 := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} uv$$

en el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. La existencia de una solución débil es consecuencia del teorema de representación de Fréchet-Riesz.

Teorema 2.36 (Existencia y unicidad de la solución débil) Para cada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema (2.12). Más aún, u es el único mínimo de la función $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$J(v) := \frac{1}{2} \|v\|_1^2 - \int_{\Omega} f v.$$

A esta última afirmación se le conoce como el **principio de Dirichlet**.

Demostración: Fijemos $f \in L^2(\Omega)$ y consideremos la función $T : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Tv := \int_{\Omega} f v.$$

Esta función es claramente lineal. Observa que $|v|_2 \leq \|v\|_1$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Por tanto, usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$|Tv| \leq |f|_2 |v|_2 \leq |f|_2 \|v\|_1 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

lo que implica que T es continua en $H_0^1(\Omega)$. Por el teorema de representación de Fréchet-Riesz existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle u, v \rangle_1 = Tv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Esto prueba que, u es una solución débil de (2.12). Por la Proposición 2.13, u es el único mínimo de J . ■

Proposición 2.37 *Si Ω es de clase $\mathcal{C}^1$, $f \in L^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ y la solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema (2.12) satisface $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, entonces u es solución clásica de (2.12).*

Demostración: Si $u \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ es la solución débil de (2.12), aplicando la fórmula de Green (Proposición 2.1) obtenemos que

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u - f)\varphi = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} u\varphi - \int_{\Omega} f\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

En consecuencia, $-\Delta u + u - f = 0$ c.d. en Ω . Como $-\Delta u + u - f$ es continua, concluimos que

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega.$$

Por otra parte, el Teorema 2.30 asegura que $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. Esto prueba que u es una solución clásica de (2.12). ■

Así pues, si Ω es de clase $\mathcal{C}^1$ y $f \in L^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, basta comprobar que la solución débil pertenece a $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ para poder afirmar la existencia de una solución clásica del problema (2.12). Esto no es un asunto sencillo, ya que no conocemos a la solución débil; sólo sabemos que existe. Afortunadamente existen criterios que aseguran la regularidad de la solución débil en términos de la regularidad de los datos del problema. El más sencillo es el siguiente.

Teorema 2.38 (de regularidad) *Si Ω es acotado y de clase $\mathcal{C}^\infty$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, y $u \in H_0^1(\Omega)$ es la solución débil del problema (2.12), entonces $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.*

Demostración: Consulta, por ejemplo, [23]. ■

Como consecuencia inmediata de este teorema y de la Proposición 2.37 obtenemos la existencia de una única solución clásica.

Teorema 2.39 (Existencia de la solución clásica) *Si Ω es acotado y de clase $\mathcal{C}^\infty$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, entonces el problema (2.12) tiene una única solución clásica $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.*

Hay teoremas de regularidad mucho más finos, que permiten obtener la existencia de la solución clásica bajo hipótesis más débiles. Una referencia muy completa para este tipo de resultados es el libro de Gilbarg y Trudinger [28]. Aquí no nos ocuparemos de ellos. Nos concentraremos únicamente en demostrar la existencia de soluciones débiles.

2.3.2. Un problema de Dirichlet no homogéneo

Sean $f, g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$. Buscamos una función $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.14)$$

La condición $u = g$ sobre $\partial\Omega$ recibe el nombre de **condición de Dirichlet no homogénea**.

Definición 2.40 Una función $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ que satisface (2.14) se llama una **solución clásica** de (2.14).

Como en el caso anterior, consideraremos primero soluciones débiles. El Teorema 2.30 sugiere buscar soluciones en el espacio afín

$$A_g := \{u \in H^1(\Omega) : u - g \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Definición 2.41 Una función $u \in A_g$ que satisface

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \quad (2.15)$$

se llama una **solución débil** de (2.14).

Teorema 2.42 (Existencia y unicidad de la solución débil) Para cada $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^1(\Omega)$ existe una única solución débil $u \in A_g$ del problema (2.14). Más aún, u es el único mínimo de la función $J : A_g \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$J(v) := \frac{1}{2} \|v\|_1^2 - \int_{\Omega} f v.$$

A esta última afirmación se le conoce como el **principio de Dirichlet**.

Proponemos la demostración de este teorema como ejercicio.

Ejercicio 2.43 (a) Prueba que, si $g \in H^1(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$, el problema (2.14) tiene una única solución débil. (Sugerencia: Prueba que $u \in A_g$ satisface (2.15) si y sólo si $v := u - g \in H_0^1(\Omega)$ satisface

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} v \varphi = - \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla \varphi - \int_{\Omega} g \varphi + \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),$$

y aplica el teorema de representación de Fréchet-Riesz.)

(b) Prueba que $u \in A_g$ es una solución débil de (2.14) si y sólo si u es un mínimo de la función $J : A_g \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

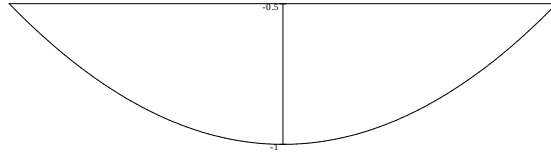
$$J(w) := \frac{1}{2} \|w\|_1^2 - \int_{\Omega} f w.$$

Nuevamente, si los datos del problema y la solución débil son suficientemente regulares, entonces ésta es una solución clásica.

Ejercicio 2.44 *Prueba que, si Ω es de clase $\mathcal{C}^1$, $f \in L^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, $g \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ y la solución débil $u \in A_g$ del problema (2.14) satisface $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, entonces u es solución clásica de (2.14).*

2.4. El principio del máximo

Si $u \in \mathcal{C}^2[a, b]$ es tal que $u(a) = u(b) = 0$ y $u''(t) \geq 0$ para todo $t \in (a, b)$, entonces $u(t) \leq 0$ para todo $t \in (a, b)$. Si además $u(t_0) = 0$ para algún $t_0 \in (a, b)$, entonces $u = 0$ en (a, b) .



Veremos a continuación que este tipo de resultados son válidos también en dimensión $N \geq 1$.

Teorema 2.45 *Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ una solución débil del problema (2.12). Si $f \leq 0$ c.d. en Ω entonces $u \leq 0$ c.d. en Ω .*

Demostración: Por el Ejercicio 2.31, $|u| \in H_0^1(\Omega)$ y $|D_i u| = |D_i |u||$ para cada $i = 1, \dots, N$. Por tanto, $\| |u| \|_1 = \|u\|_1$ y, como $f \leq 0$ c.d. en Ω ,

$$J(-|u|) = \frac{1}{2} \| -|u| \|_1 - \int_{\Omega} f(-|u|) \leq \frac{1}{2} \|u\|_1 - \int_{\Omega} f u = J(u).$$

Por el Teorema 2.36, u es el único mínimo de J . En consecuencia, $u = -|u| \leq 0$. ■

Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ se tiene un resultado más fuerte, que enunciamos a continuación.

Teorema 2.46 (Principio fuerte del máximo de Hopf) *Sean Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$ y $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Si $\Delta u \geq 0$ en Ω y si u alcanza su máximo en Ω entonces u es constante.*

Demostración: Consulta por ejemplo [23, 28]. ■

Corolario 2.47 Sean Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$ y $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ es solución clásica del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

y $f \leq 0$ en Ω , entonces, o bien $u = 0$, o bien $u < 0$ en Ω .

Demostración: Por el Teorema 2.45, $u \leq 0$ en $\overline{\Omega}$. Si $u(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in \Omega$, el principio fuerte del máximo asegura que $u_0 = 0$ en Ω . Esto demuestra la afirmación.

■

Capítulo 3

Valores propios del laplaciano

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. El objetivo de este capítulo es estudiar la existencia de valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene una solución no trivial. Dichos valores se conocen como los valores propios de Dirichlet de $-\Delta$.

3.1. Preliminares

3.1.1. Convergencia débil

A diferencia de lo que ocurre en $\mathbb{R}^N$, en cualquier espacio de Hilbert de dimensión infinita existen sucesiones acotadas que no contienen ninguna subsucesión convergente (ver Ejercicio 3.4). Una noción de convergencia, más débil que la usual, que sí tiene esa propiedad es la siguiente.

Definición 3.1 Sea H un espacio de Hilbert. Una sucesión (u_k) en H **converge débilmente a u en H** si, para cada $v \in H$, se cumple que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_k, v \rangle = \langle u, v \rangle.$$

u se llama el **límite débil** de la sucesión (u_k) .

Notación 3.2 Escribiremos

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } H$$

para referirnos a la convergencia débil. Para evitar confusiones, a menudo escribiremos

$$u_k \rightarrow u \text{ fuertemente en } H$$

si (u_k) converge a u en H en el sentido usual.

Ejercicio 3.3 Demuestra las siguientes afirmaciones:

- (a) Si el límite débil de una sucesión existe, entonces es único.
- (b) Si $u_k \rightarrow u$ fuertemente en H , entonces $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H .
- (c) Si $u_k \rightharpoonup u$ y $v_k \rightharpoonup v$ débilmente en H y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda u_k + \mu v_k \rightharpoonup \lambda u + \mu v$ débilmente en H .

Los conceptos de convergencia fuerte y convergencia débil coinciden sólo cuando H es de dimensión finita. Más precisamente, se cumple lo siguiente.

Ejercicio 3.4 Demuestra las siguientes afirmaciones:

- (a) Si $\dim H < \infty$, entonces $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H si y sólo si $u_k \rightarrow u$ fuertemente en H .
- (b) Sea $\mathcal{O} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de H , es decir, $\|e_k\| = 1$ y $\langle e_k, e_j \rangle = 0$ si $k \neq j$. Entonces, $e_k \rightharpoonup 0$ débilmente en H pero (e_k) no converge fuertemente en H .

Ejercicio 3.5 Demuestra las siguientes afirmaciones:

- (a) $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H si y sólo si $\ell u_k \rightarrow \ell u$ en $\mathbb{R}$ para toda función lineal y continua $\ell : H \rightarrow \mathbb{R}$. (Sugerencia: Usa el teorema de representación de Fréchet-Riesz.)
- (b) Si $T : H_1 \rightarrow H_2$ es lineal y continua y $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H_1 entonces $Tu_k \rightharpoonup Tu$ débilmente en H_2 .

A continuación enunciaremos las propiedades más importantes de la convergencia débil. Su demostración se encuentra, por ejemplo, en [11, 14, 32].

Proposición 3.6 (a) Si (u_k) converge débilmente a u en H , entonces

$$\|u\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|.$$

(b) Si (u_k) converge débilmente a u en H y

$$\|u\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|,$$

entonces (u_k) converge fuertemente a u en H .

Ejercicio 3.7 *Prueba que la afirmación (b) del Ejercicio 3.5 no es cierta si T es únicamente continua pero no es lineal.*

Proposición 3.8 *Si $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H entonces (u_k) está acotada en H .*

Teorema 3.9 (Propiedad fundamental de la convergencia débil) *Toda sucesión acotada en H contiene una subsucesión débilmente convergente en H .*

3.1.2. Un teorema de minimización

Definición 3.10 *Un subconjunto M de H es **débilmente cerrado** en H si para cualquier sucesión (u_k) en M tal que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H se cumple que $u \in M$.*

Ejercicio 3.11 *Demuestra las siguientes afirmaciones:*

- (a) *Si M es débilmente cerrado en H , entonces M es cerrado en H .*
- (b) *Si H es un espacio de Hilbert de dimensión infinita, la esfera unitaria*

$$S := \{v \in H : \|v\| = 1\}$$

es cerrada pero no es débilmente cerrada en H .

- (c) *Todo subespacio vectorial cerrado V de un espacio de Hilbert H es débilmente cerrado.*

Definición 3.12 *Una función $f : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es **coerciva** en M si para toda sucesión (u_k) en M tal que $\|u_k\| \rightarrow \infty$ se cumple que $f(u_k) \rightarrow \infty$.*

Definición 3.13 *Una función $f : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es **débilmente semicontinua inferiormente (d.s.c.i.)** en M si para toda sucesión (u_k) en M tal que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H se cumple que*

$$f(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(u_k).$$

Ejercicio 3.14 *Prueba que, para todo $\alpha \in (0, \infty)$, la función $f(u) := \|u\|^\alpha$ es coerciva y d.s.c.i. en H .*

Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.15 *Si M es no vacío y débilmente cerrado en H y $f : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es coerciva y d.s.c.i. en M entonces f alcanza su mínimo en M , es decir, existe $u_0 \in M$ tal que*

$$f(u_0) = \inf_{u \in M} f(u).$$

Demostración: Sea $c_0 := \inf_{u \in M} f(u)$. Si $c_0 = \infty$ entonces $f(u) = \infty$ para todo $u \in M$. Supongamos pues que $c_0 \in [-\infty, \infty)$ y tomemos $u_k \in M$ tal que $f(u_k) \rightarrow c_0$. Como f es coerciva en M , la sucesión (u_k) está acotada en H . Por el Teorema 3.9 esta sucesión contiene una subsucesión (u_{n_k}) que converge débilmente a u_0 en H . Dado que M es débilmente cerrado se tiene que $u_0 \in M$ y, como f es d.s.c.i.,

$$c_0 \leq f(u_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(u_k) = c_0.$$

En consecuencia, $f(u_0) = c_0 \in \mathbb{R}$. ■

3.1.3. La desigualdad de Sobolev

Denotemos por

$$|\nabla u|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \right)^{1/2}$$

La siguiente desigualdad juega un papel muy importante en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales.

Teorema 3.16 (Desigualdad de Sobolev) Sean $N \geq 3$ y $2^* := \frac{2N}{N-2}$. Existe una constante $C_N > 0$, que depende sólo de N , tal que

$$|\varphi|_{2^*} \leq C_N |\nabla \varphi|_2 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (3.1)$$

Demostración: Consulta por ejemplo [11, 14, 23, Teorema IX.9]. ■

$2^* := \frac{2N}{N-2}$ se llama el **exponente crítico de Sobolev** y es el único número para el que se cumple la desigualdad anterior. Puedes comprobar esta afirmación siguiendo la sugerencia que se indica en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 3.17 Sea $p \in [1, \infty)$. Prueba que, si existe $C > 0$ tal que

$$|\varphi|_p \leq C |\nabla \varphi|_2 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

entonces $p = 2^*$. (Sugerencia: Fija $0 \neq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Para $\lambda > 0$, aplica la desigualdad anterior a las funciones $\varphi_\lambda \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dadas por $\varphi_\lambda(x) := \varphi(\lambda x)$.)

Corolario 3.18 $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ y

$$|u|_{2^*} \leq |\nabla u|_2 \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (3.2)$$

Demostración: Si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ y (φ_k) es una sucesión en $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ que converge a u en $H^1(\mathbb{R}^N)$, entonces $|\varphi_k - u|_2 \rightarrow 0$ y $|\nabla \varphi_k - \nabla u|_2 \rightarrow 0$. Por otra parte, de la desigualdad (3.1) se sigue que

$$|\varphi_k - \varphi_j|_{2^*} \leq C_N |\nabla (\varphi_k - \varphi_j)|_2 \leq C_N \|\varphi_k - \varphi_j\|_1 \quad \forall k, j \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, (φ_k) es una sucesión de Cauchy en $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ y, en consecuencia, $\varphi_k \rightarrow v$ en $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Como además $\varphi_k \rightarrow u$ en $L^2(\mathbb{R}^N)$, una subsucesión de (φ_k) converge tanto a u como a v c.d. en $\mathbb{R}^N$. Por tanto, $u(x) = v(x)$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^N$. Esto implica que $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ y que

$$|u|_{2^*} = \lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi_k|_{2^*} \leq C_N \lim_{k \rightarrow \infty} |\nabla \varphi_k|_2 = |\nabla u|_2 \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

como afirma el enunciado. ■

Una consecuencia importante de la desigualdad de Sobolev es la siguiente.

Corolario 3.19 (Encajes de Sobolev) $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [2, 2^*]$ y esta inclusión es continua.

Demostración: Si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ entonces, por el Corolario 3.18, $u \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. La desigualdad de interpolación (2.2) asegura que $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in [2, 2^*]$ y, combinándola con la desigualdad (3.2) obtenemos que

$$|u|_p \leq |u|_2^{1-\alpha} |u|_{2^*}^\alpha \leq C_N^\alpha \|u\|_1^{1-\alpha} \|u\|_1^\alpha = C_N^\alpha \|u\|_1,$$

donde $\alpha \in [0, 1]$ cumple que $\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2^*}$. Esto prueba que la inclusión $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ es continua. ■

Cuando Ω es un dominio acotado, se cumple lo siguiente.

Teorema 3.20 (Desigualdad de Poincaré) Si Ω es acotado y $p \in [1, 2^*]$, existe una constante $C_{\Omega,p} > 0$, que depende de Ω y de p , tal que

$$|u|_p \leq C_{\Omega,p} |\nabla u|_2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

En consecuencia, $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ y esta inclusión es continua.

Demostración: Sea $u \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$. Combinando la desigualdad (3.2) con la desigualdad del Ejercicio 2.5 obtenemos

$$|u|_p \leq |\Omega|^{(2^*-p)/2^*p} |u|_{2^*} \leq |\Omega|^{(2^*-p)/2^*p} C_N |\nabla u|_2.$$

Ésta es la desigualdad deseada. ■

La desigualdad de Poincaré para $p = 2$ asegura que, si Ω es un dominio acotado,

$$\lambda_1(\Omega) := \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} u^2} > 0. \quad (3.3)$$

$\lambda_1(\Omega)$ se llama el **primer valor propio de Dirichlet de $-\Delta$ en Ω** . En la siguiente sección justificaremos este nombre.

Una consecuencia importante de la desigualdad de Poincaré es la siguiente.

Ejercicio 3.21 Si Ω es un dominio acotado y $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$ denotamos por

$$\langle u, v \rangle_{\lambda} : = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_{\Omega} uv, \quad \langle u, v \rangle := \langle u, v \rangle_0, \quad (3.4)$$

$$\|u\|_{\lambda} : = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \lambda \int_{\Omega} |u|^2 \right)^{1/2}, \quad \|u\| := \|u\|_0. \quad (3.5)$$

- (a) Prueba que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\lambda}$ es un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$.
 (b) Prueba que la norma $\|\cdot\|_{\lambda}$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|$, es decir, que existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \|u\| \leq \|u\|_{\lambda} \leq C_2 \|u\| \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

En consecuencia, $H_0^1(\Omega)$ es completo con cualquiera de estas normas.

Más adelante requeriremos el siguiente resultado.

Ejercicio 3.22 (a) Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$. Prueba que existe una constante $C > 0$, que depende sólo de $|\varphi|_{\infty}, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|_{\infty}, \dots, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_N} \right|_{\infty}$, tal que

$$\|u\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

donde $|\psi|_{\infty} := \max_{x \in \Omega} |\psi(x)|$ si $\psi \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$. (Sugerencia: Usa el Ejercicio 2.28.)

(b) Si ω es abierto y $\omega \subset \subset \Omega$, prueba que existe una constante $C > 0$ que depende sólo de ω y Ω , tal que

$$\left(\int_{\omega} |u|^{2^*} \right)^{2/2^*} \leq C \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (3.6)$$

(Sugerencia: Prueba que existe $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in \omega$ y aplica el problema anterior y el Teorema 3.16.)

(c) Si ω es abierto, $\omega \subset\subset \Omega$, y C satisface (3.6), prueba que para esa misma C se cumple que

$$\left(\int_{\omega+\xi} |u|^{2^*} \right)^{2/2^*} \leq C \int_{\Omega+\xi} (|\nabla u|^2 + u^2) \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

donde $X + \xi := \{x + \xi : x \in X\}$.

3.1.4. El teorema de Rellich-Kondrashov

El siguiente resultado juega un papel fundamental en los problemas que estudiaremos en éste y los siguientes dos capítulos.

Teorema 3.23 (Rellich-Kondrashov) *Si Ω es un dominio acotado y $p \in [1, 2^*)$, entonces toda sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$ contiene una subsucesión que converge fuertemente en $L^p(\Omega)$.*

Una función $F : V \rightarrow W$ entre espacios de Banach tal que toda sucesión acotada en V contiene una subsucesión cuya imagen bajo F converge en W se llama un **operador compacto**. El teorema de Rellich-Kondrashov afirma pues que, si Ω es un dominio acotado, la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es un operador compacto para todo $p \in [1, 2^*)$. Como veremos más adelante, esto no es cierto si Ω no es acotado ni si Ω es acotado y $p = 2^*$ (ver Propositiones 6.2 y 7.1).

Corolario 3.24 *Si Ω es un dominio acotado y $p \in [1, 2^*)$, entonces*

$$\Sigma_p := \{u \in H_0^1(\Omega) : |u|_p = 1\}$$

es débilmente cerrado en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración: Sea $u_k \in \Sigma_p$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$. Entonces (u_k) está acotada en $H_0^1(\Omega)$ (ver Proposición 3.8) y el Teorema 3.23 asegura que contiene una subsucesión (u_{k_j}) que converge fuertemente a v en $L^p(\Omega)$. De modo que $v \in \Sigma_p$.

Por otra parte, dado que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es lineal y continua, se tiene que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $L^p(\Omega)$ (ver Ejercicio 3.5) y, puesto que el límite débil es único, necesariamente $u = v$. Así pues, $u \in \Sigma_p$. ■

Sea (u_k) una sucesión en $L^p(\Omega)$. Se dice que

$$u_k \rightarrow u \quad \text{en } L_{loc}^p(\Omega)$$

si

$$|u_k - u|_{L^p(\omega)} \rightarrow 0 \quad \text{para todo abierto } \omega \subset\subset \Omega.$$

Usaremos con frecuencia la siguiente consecuencia del teorema de Rellich-Kondrashov.

Corolario 3.25 *Si $p \in [2, 2^*)$, entonces toda sucesión acotada (u_k) en $H_0^1(\Omega)$ contiene una subsucesión - a la que denotaremos del mismo modo - tal que*

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega), \\ u_k &\rightarrow u \quad \text{c.d. en } \Omega, \\ u_k &\rightarrow u \quad \text{en } L_{loc}^p(\Omega). \end{aligned}$$

Demostración: Por el Teorema 3.9 (u_k) contiene una subsucesión - a la que, para simplificar la notación, denotamos del mismo modo - tal que

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega).$$

Consideramos dos casos:

CASO 1. Ω es acotado.

Por el Teorema 3.23, una subsucesión de la anterior - a la que seguimos denotando del mismo modo - cumple que

$$u_k \rightarrow v \quad \text{fuertemente en } L^p(\Omega).$$

Argumentando como en la demostración del corolario anterior concluimos que $u = v$. Una subsucesión de ésta cumple además que

$$u_k(x) \rightarrow u(x) \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega.$$

CASO 2. Ω arbitrario.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos

$$\omega_m := \{x \in \Omega : |x| < m, \text{dist}(x, \partial\Omega) < \frac{1}{m}\}.$$

Entonces ω_m es acotado. Aplicando el Caso 1 concluimos que (u_k) contiene una subsucesión $(u_{1,k})$ tal que

$$u_{1,k} \rightarrow u \quad \text{fuertemente en } L^p(\omega_1), \quad u_k(x) \rightarrow u(x) \quad \text{p.c.t. } x \in \omega_1.$$

Inductivamente, $(u_{m-1,k})$ contiene una subsucesión $(u_{m,k})$ tal que

$$u_{m,k} \rightarrow u \quad \text{fuertemente en } L^p(\omega_m), \quad u_k(x) \rightarrow u(x) \quad \text{p.c.t. } x \in \omega_m.$$

Definimos $v_k := u_{k,k}$. Entonces (v_k) es una subsucesión de (u_k) con las propiedades deseadas. ■

3.2. Valores propios del laplaciano

En toda esta subsección Ω denotará a un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

Procediendo como en el capítulo anterior se llega a la definición de solución débil, a la que llamaremos simplemente una solución de este problema.

Definición 3.26 Una solución de (3.7) es una pareja (λ, u) con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in H_0^1(\Omega)$, que satisface

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_{\Omega} uv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.8)$$

Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$** si existe $e \in H_0^1(\Omega)$, $e \neq 0$, tal que (λ, e) es solución de (3.7). En tal caso decimos que e es una **función propia de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ asociada a λ** .

En lo que resta de esta sección daremos a $H_0^1(\Omega)$ el producto escalar y la norma siguientes:

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{y} \quad \|u\| := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2}.$$

Observa que, si e es una función propia asociada a λ entonces te también lo es, para cualquier $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Basta entonces buscar funciones propias en el conjunto

$$\Sigma_2 := \{u \in H_0^1(\Omega) : |u|_2 = 1\}.$$

Nota que si $e \in \Sigma_2$ es una función propia asociada a λ , tomando $u = v = e$ en la ecuación (3.8), se obtiene que

$$\|e\|^2 = \lambda. \quad (3.9)$$

Proposición 3.27 (i) Los valores propios de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ son positivos.

(ii) Si λ y μ son valores propios distintos de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$, y e_λ y e_μ son funciones propias asociadas a λ y μ respectivamente, entonces

$$\langle e_\lambda, e_\mu \rangle = 0 = \langle e_\lambda, e_\mu \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

(iii) Si $\{e_k \in \Sigma_2 : k \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto de funciones propias de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ que es ortonormal en $L^2(\Omega)$, entonces el conjunto de sus valores propios $\{\lambda_k = \|e_k\|^2 : k \in \mathbb{N}\}$ no está acotado.

(iv) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ el espacio

$$E_\lambda := \{u \in H_0^1(\Omega) : (\lambda, u) \text{ es solución de (3.7)}\}$$

es de dimensión finita. Su dimensión se llama la **multiplicidad de λ** .

Demostración: (i) Si λ es un valor propio y $e \in \Sigma_2$ es una función propia asociada a λ , la desigualdad de Poincaré asegura que

$$0 < C_{\Omega,2}^{-2} = C_{\Omega,2}^{-2} |e|_2^2 \leq \|e\|^2 = \lambda.$$

(ii) Si e_λ y e_μ son funciones propias asociadas a λ y μ , entonces

$$\lambda \langle e_\lambda, e_\mu \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle e_\lambda, e_\mu \rangle = \mu \langle e_\lambda, e_\mu \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Por tanto, si $\lambda \neq \mu$, se tiene que $\langle e_\lambda, e_\mu \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 = \int_\Omega \nabla e_\lambda \cdot \nabla e_\mu$.

(iii) Como $e_k \in \Sigma_2$ se cumple que

$$\|e_k\|_1^2 = \|e_k\|_2^2 + \|e_k\|^2 = 1 + \lambda_k.$$

De modo que, si (λ_k) está acotada, (e_k) es una sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$. Por el Teorema de Rellich-Kondrashov (Teorema 3.23), (e_k) contiene una subsucesión convergente en $L^2(\Omega)$. Ahora bien, como $\{e_k\}$ es ortonormal en $L^2(\Omega)$, se tiene que

$$|e_k - e_m|_2^2 = |e_k|_2^2 + |e_m|_2^2 = 2.$$

En consecuencia, ninguna subsucesión de (e_k) es de Cauchy en $L^2(\Omega)$. Esto es una contradicción.

(iv) Argumentando por contradicción, si $\dim E_\lambda = \infty$, entonces E_λ contiene un subconjunto ortonormal numerable de funciones propias de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ asociadas al valor propio λ . Esto contradice la afirmación (iii). ■

La siguiente proposición nos permite obtener funciones propias por un proceso de minimización. Definimos $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$I(u) := \|u\|^2.$$

Proposición 3.28 Sea H un subespacio vectorial de $H_0^1(\Omega)$.

(i) Si e es un mínimo de I en $\Sigma_2 \cap H$ entonces

$$\langle e, v \rangle = \lambda \langle e, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H,$$

donde $\lambda := I(e)$.

(ii) Si H es cerrado en $H_0^1(\Omega)$ y $H \neq \{0\}$, la función I alcanza su mínimo en $\Sigma_2 \cap H$.

Demostración: (i): Sea e un mínimo de I en $\Sigma_2 \cap H$ y sea $v \in H$. Tomemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña de modo que $\|e + tv\|_2 \neq 0$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, y consideremos la función $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) := I\left(\frac{e + tv}{\|e + tv\|_2}\right) = \frac{\|e + tv\|^2}{\|e + tv\|_2^2} = \frac{\|e\|^2 + 2\langle e, v \rangle t + \|v\|^2 t^2}{\|e\|_2^2 + 2\langle e, v \rangle_{L^2(\Omega)} t + \|v\|_2^2 t^2}.$$

Esta función es diferenciable y su derivada está dada por

$$h'(t) = 2 \frac{\|e + tv\|_2^2 (\langle e, v \rangle + \|v\|^2 t) - 2I(e + tv) (\langle e, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \|v\|_2^2 t)}{\|e + tv\|_2^4}.$$

Como 0 es un mínimo de h , se tiene que

$$0 = h'(0) = 2 \left(\langle e, v \rangle - I(e) \langle e, v \rangle_{L^2(\Omega)} \right).$$

Esto demuestra la afirmación.

(ii): Como H y Σ_2 son débilmente cerrados (ver Ejercicio 3.11 y Corolario 3.24), su intersección $\Sigma_2 \cap H$ es débilmente cerrado en $H_0^1(\Omega)$. La función I es coerciva y d.s.c.i. en $H_0^1(\Omega)$ (ver Ejercicio 3.14). Además, puesto que $H \neq \{0\}$, se tiene que $\Sigma_2 \cap H \neq \emptyset$. Así, por el Teorema 3.15, I alcanza su mínimo en $\Sigma_2 \cap H$. ■

Teorema 3.29 Existe un conjunto $\mathcal{B} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ de $H_0^1(\Omega)$ con las siguientes propiedades:

- (a) e_k es un vector propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ con valor propio $\lambda_k := I(e_k)$,
- (b) $\langle e_k, e_m \rangle = 0$ si $k \neq m$,
- (c) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$,
- (d) $\mathcal{B}$ es una base de Hilbert de $L^2(\Omega)$.

Demostración: Usando la Proposición 3.28 definimos (e_k) inductivamente como sigue: escogemos $e_1 \in \Sigma_2$ tal que

$$I(e_1) = \inf_{u \in \Sigma_2} I(u).$$

Sean $W_2 := \text{lin}\{e_1\}$ el subespacio de $H_0^1(\Omega)$ generado por e_1 y $H_2 := \{v \in H_0^1(\Omega) : \langle e_1, v \rangle = 0\}$ su complemento ortogonal en $H_0^1(\Omega)$. Escogemos $e_2 \in \Sigma_2 \cap H_2$ tal que

$$I(e_2) = \inf_{u \in \Sigma_2 \cap H_2} I(u).$$

Continuando de este modo, definimos

$$W_k := \text{lin}\{e_1, \dots, e_{k-1}\}, \quad H_k := \{v \in H_0^1(\Omega) : \langle w, v \rangle = 0 \quad \forall w \in W_k\},$$

y escogemos $e_k \in \Sigma_2 \cap H_k$ tal que

$$I(e_k) = \inf_{u \in \Sigma_2 \cap H_k} I(u). \quad (3.10)$$

Se tiene entonces que

$$H_i \supset H_k \quad \text{y} \quad \langle e_k, e_i \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k-1. \quad (3.11)$$

Además,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots, \quad (3.12)$$

donde $\lambda_k := I(e_k)$, y de la Proposición 3.28 se sigue que

$$\langle e_k, v \rangle = \lambda_k \langle e_k, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_k. \quad (3.13)$$

De (3.11) y (3.13) se sigue que $0 = \langle e_i, e_k \rangle = \lambda_i \langle e_i, e_k \rangle_{L^2(\Omega)}$ para todo $i = 1, \dots, k-1$ y, dado que $\lambda_i > 0$, esta igualdad implica que

$$0 = \langle e_i, e_k \rangle = \langle e_i, e_k \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall i = 1, \dots, k-1. \quad (3.14)$$

Como $H_0^1(\Omega) = W_k \oplus H_k$, las afirmaciones (3.13) y (3.14) nos permiten concluir que

$$\langle e_k, v \rangle = \lambda_k \langle e_k, v \rangle_2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

es decir, la sucesión (e_k) satisface (a). La afirmación (3.14) asegura que se cumple (b) y, como $e_k \in \Sigma_2$, asegura también que $\mathcal{B} := \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ es ortonormal en $L^2(\Omega)$. La afirmación (c) se sigue entonces de (3.12) y de la Proposición 3.27.

Para obtener (d) resta probar que la cerradura de $\text{lin}(\mathcal{B}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$ en $L^2(\Omega)$ es $L^2(\Omega)$. Para ello basta demostrar que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ está contenido en la cerradura de $\text{lin}(\mathcal{B})$, ya que $L^2(\Omega)$ es la cerradura de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$.

Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \setminus \text{lin}(\mathcal{B})$. Denotemos por w_k a la proyección ortogonal de φ sobre W_k con respecto al producto escalar de $L^2(\Omega)$. Entonces $\langle \varphi - w_k, w \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$ para todo $w \in W_k$. En consecuencia,

$$\langle \varphi - w_k, e_i \rangle = \lambda_i \langle \varphi - w_k, e_i \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k-1.$$

Esto prueba que $\langle \varphi - w_k, w \rangle = 0$ para todo $w \in W_k$. Como $\varphi \neq w_k$ se tiene que $\frac{\varphi - w_k}{|\varphi - w_k|_2} \in \Sigma_2 \cap H_k$ y la identidad (3.10) implica que

$$\lambda_k \leq I \left(\frac{\varphi - w_k}{|\varphi - w_k|_2} \right).$$

Observa además que

$$\begin{aligned} I(\varphi) &= I(\varphi - w_k + w_k) = \|\varphi - w_k\|^2 + 2 \langle \varphi - w_k, w_k \rangle + \|w_k\|^2 \\ &= \|\varphi - w_k\|^2 + \|w_k\|^2 \geq \|\varphi - w_k\|^2 = I(\varphi - w_k). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$|\varphi - w_k|_2^2 \leq \lambda_k^{-1} I(\varphi - w_k) \leq \lambda_k^{-1} I(\varphi).$$

Como $\lambda_k \rightarrow \infty$ concluimos que $w_k \rightarrow \varphi$ en $L^2(\Omega)$. Esto prueba que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ está contenido en la cerradura de $\text{lin}(\mathcal{B})$ en $L^2(\Omega)$. ■

Observa que

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|^2}{|u|_2^2} > 0,$$

así que, como mencionamos en (3.3), $\lambda_1^{-1/2}$ es la constante óptima para la desigualdad de Poincaré

$$|u|_2 \leq \lambda_1^{-1/2} \|u\|.$$

Ejercicio 3.30 Prueba que, si $\lambda \leq \lambda_1$, entonces

$$\|u\|_\lambda := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda \int_\Omega |u|^2 \right)^{1/2}$$

no es una norma en $H_0^1(\Omega)$.

Ejercicio 3.31 Prueba que, para cada $f \in L^2(\Omega)$ y $\lambda > -\lambda_1$, el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

tiene una única solución débil, es decir, existe una única función $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega u \varphi = \int_\Omega f \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Además, esta función minimiza el funcional $J_\lambda : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla v|^2 + \lambda v^2) - \int_\Omega f v.$$

Capítulo 4

La variedad de Nehari

El objetivo de este capítulo es estudiar el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\lambda \in (-\lambda_1(\Omega), \infty)$ y $p \in (2, 2^*]$, donde $\lambda_1(\Omega)$ es el primer valor propio de Dirichlet de $-\Delta$ en Ω y $2^* := \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev. Probaremos que este problema tiene al menos una solución no trivial si Ω es un dominio acotado y $p \in (2, 2^*)$,

4.1. Preliminares

Empezaremos introduciendo los conceptos y resultados que usaremos para abordar este problema.

4.1.1. Diferenciabilidad en espacios de Banach

La noción de derivada de una función entre espacios euclidianos se extiende a espacios de Banach casi literalmente, con la siguiente precaución: mientras que cualquier función lineal $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ resulta automáticamente continua, una función lineal entre espacios de Banach de dimensión infinita no es necesariamente continua. Por ello se requiere agregar esta condición a la definición de derivada que a continuación daremos.

Sean V y W espacios de Banach, con normas $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_W$ respectivamente. El espacio

$$\mathcal{B}(V, W) := \{T : V \rightarrow W : T \text{ es lineal y continua}\}$$

con la norma

$$\|T\|_{\mathcal{B}(V,W)} := \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} \quad (4.1)$$

resulta ser un espacio de Banach. Si $W = \mathbb{R}$ se escribe

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{R}).$$

Definición 4.1 Sea $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto de V . Una función $F : \mathcal{O} \rightarrow W$ es **diferenciable en el punto** $u_0 \in \mathcal{O}$ si existe $T \in \mathcal{B}(V, W)$ tal que

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|F(u_0 + v) - F(u_0) - Tv\|_W}{\|v\|_V} = 0. \quad (4.2)$$

T se llama **la derivada de F en u_0** y se denota

$$F'(u_0) := T.$$

Se dice que F es **diferenciable en $\mathcal{O}$** si lo es en cada punto $u \in \mathcal{O}$. La función

$$F' : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{B}(V, W), \quad u \mapsto F'(u),$$

se llama **la derivada de F en $\mathcal{O}$** . Si la función F' es continua, decimos que F es **de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathcal{O}$** .

Si la derivada $F' : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{B}(V, W)$ de F es, a su vez, de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathcal{O}$, se dice que F es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathcal{O}$. La derivada de F' en $\mathcal{O}$ se llama la segunda derivada de F en $\mathcal{O}$ y se denota F'' . Inductivamente se define lo que significa que F es de clase $\mathcal{C}^k$ en $\mathcal{O}$. La k -ésima derivada de F en $\mathcal{O}$ se denota $F^{(k)}$. Una discusión detallada de estos conceptos se encuentra, por ejemplo, en [14].

Ejercicio 4.2 Si $F : \mathcal{O} \rightarrow W$ es una función constante, prueba que F es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathcal{O}$ y que $F'(u) : V \rightarrow W$ es la función constante igual a 0 para cada $u \in \mathcal{O}$. Calcula $F^{(k)}$ para todo k .

Ejercicio 4.3 Prueba que toda función $T \in \mathcal{B}(V, W)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en V y que $T'(u) = T$ para cada $u \in V$. Calcula $T^{(k)}$ para todo k .

Si $\mathcal{O}$ es un abierto de un espacio de Hilbert H y $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, la derivada $F'(u) : H \rightarrow \mathbb{R}$ en cada punto $u \in \mathcal{O}$ es, por definición, una función lineal y continua. Así que el teorema de representación de Fréchet-Riesz afirma la existencia de un único elemento $\nabla F(u) \in H$ tal que

$$\langle \nabla F(u), v \rangle = F'(u)v \quad \text{para todo } v \in H.$$

$\nabla F(u)$ se llama el **gradiente de F en u** .

Ejercicio 4.4 Sea $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable. Prueba que F es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathcal{O}$ si y sólo si la función $\nabla F : \mathcal{O} \rightarrow H$ que a cada $u \in \mathcal{O}$ le asocia $\nabla F(u)$ es una función continua.

Ejercicio 4.5 Prueba que, para todo espacio de Hilbert H , la función $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(u) := \frac{1}{2} \|u\|^2$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en H y $F'(u)v = \langle u, v \rangle$ para todo $v \in H$. ¿Quién es $\nabla F(u)$?

4.1.2. El operador de Nemytskii

Sean Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$, $p \in [1, \infty)$ y $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Daremos condiciones para que la función

$$\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(u) := \int_{\Omega} f(x, u(x)) dx,$$

esté bien definida y sea de clase $\mathcal{C}^1$.

Lema 4.6 Si $u_n \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$ entonces existen una subsucesión (v_n) de (u_n) y una función $g \in L^p(\Omega)$ tales que

$$v_n \rightarrow u \text{ c.d. en } \Omega \quad \text{y} \quad |u|, |v_n| \leq g \text{ c.d. en } \Omega.$$

Demostración: Como $u_n \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$, (u_n) contiene una subsucesión (v_n) tal que

$$v_n \rightarrow u \text{ c.d. en } \Omega \quad \text{y} \quad |v_{j+1} - v_j|_p \leq \frac{1}{2^j} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Definimos $v_0 := 0$,

$$g_n := \sum_{j=1}^n |v_j - v_{j-1}| \quad \text{y} \quad g := \sum_{j=1}^{\infty} |v_j - v_{j-1}|.$$

Observa que $g_n \in L^p(\Omega)$. Como las series de normas en $L^p(\Omega)$ satisfacen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |v_j - v_{j-1}|_p &\leq |v_1|_p + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty, \\ \sum_{j=n+1}^{\infty} |v_j - v_{j-1}|_p &\leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

se tiene que $g \in L^p(\Omega)$ y $|g - g_n|_p \rightarrow 0$ (ver [14, Teorema 5.25]). Dado que $|v_n| \leq g_n$, se tiene que $|v_n| \leq g$ y, pasando al límite cuando $n \rightarrow \infty$, concluimos que $|u| \leq g$. ■

Proposición 4.7 Sean Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $p, r \in [1, \infty)$ y $f \in C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Si existe $c > 0$ tal que

$$|f(x, s)| \leq c(|s|^{p/r} + 1) \quad \forall (x, s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

entonces el **operador de Nemytskii**

$$f_{\#} : L^p(\Omega) \rightarrow L^r(\Omega), \quad f_{\#}(u)(x) := f(x, u(x)),$$

está bien definido y es continuo.

Demostración: Si $u \in L^p(\Omega)$ y Ω es acotado se tiene que $|u|^{p/r} + 1 \in L^r(\Omega)$. Dado que la función $x \mapsto f(x, u(x))$ es medible y

$$|f_{\#}(u)(x)| = |f(x, u(x))| \leq c(|u(x)|^{p/r} + 1) \quad \forall x \in \Omega,$$

concluimos que $f_{\#}(u) \in L^r(\Omega)$. Esto prueba que el operador de Nemytskii está bien definido. Probemos ahora la continuidad. Sea $u_k \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$. Tomemos una subsucesión (v_k) y $g \in L^p(\Omega)$ como en el Lema 4.6. Como f es continua,

$$|f_{\#}(v_k)(x) - f_{\#}(u)(x)| = |f(x, v_k(x)) - f(x, u(x))| \rightarrow 0 \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega$$

y, puesto que $|g|^{p/r} + 1 \in L^r(\Omega)$ y que

$$\begin{aligned} |f_{\#}(v_k) - f_{\#}(u)| &\leq c(|v_k|^{p/r} + 1) + c(|u|^{p/r} + 1) \\ &\leq 2c(|g|^{p/r} + 1) \quad \text{c.d. en } \Omega, \end{aligned}$$

el teorema de convergencia dominada (ver [14, Teorema 14.25]) asegura que $f_{\#}(v_k) \rightarrow f_{\#}(u)$ en $L^r(\Omega)$. Así pues, hemos probado que cualquier sucesión (u_k) tal que $u_k \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$ contiene una subsucesión (v_k) tal que $\eta(v_k) \rightarrow \eta(u)$ en $L^r(\Omega)$. Esto implica que $f_{\#}$ es continua en u . ■

Teorema 4.8 Sean Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, y $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Denotamos por $f(x, s) := \frac{\partial F}{\partial s}(x, s)$. Si existen $c > 0$ y $\sigma \in (0, \frac{N+2}{N-2}]$ tales que

$$|f(x, s)| \leq c(|s|^{\sigma} + 1) \quad \forall (x, s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

entonces la función

$$\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(u) := \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx = \int_{\Omega} F_{\#}(u),$$

está bien definida, es de clase C^1 y

$$\Phi'(u)v = \int_{\Omega} f(x, u(x))v(x) dx = \int_{\Omega} f_{\#}(u) v.$$

Demostración: Por el teorema del valor medio, para cada $(x, s) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, existe $t \in (0, 1)$ tal que $F(x, s) = F(x, 0) + f(x, ts)s$. En consecuencia, existe $c_1 > 0$ tal que

$$|F(x, s)| \leq \max_{x \in \bar{\Omega}} |F(x, 0)| + c(|s|^\sigma + 1)|s| \leq c_1(|s|^{\sigma+1} + 1) \quad \forall (x, s) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Como Ω es acotado, $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1, 2^*]$ (ver Teorema 3.20) y, puesto que $\sigma + 1 \in [1, 2^*]$, el Teorema 4.7 (con $p = \sigma + 1$ y $r = 1$) asegura que $F_\#(u) \in L^1(\Omega)$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Esto muestra que Φ está bien definida.

Para probar que Φ es diferenciable fijemos $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Entonces, por el teorema fundamental del cálculo y el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \Phi(u + v) - \Phi(u) &= \int_{\Omega} [F(x, u(x) + v(x)) - F(x, u(x))] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\int_0^1 \frac{d}{dt} F(x, u(x) + tv(x)) dt \right] dx \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega} f(x, u(x) + tv(x))v(x) dx dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\Omega} f_\#(u + tv)v \right) dt. \end{aligned}$$

De las desigualdades de Hölder y Sobolev se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \left| \Phi(u + v) - \Phi(u) - \int_{\Omega} f_\#(u)v \right| &= \left| \int_0^1 \left(\int_{\Omega} [f_\#(u + tv) - f_\#(u)]v \right) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_{\Omega} |f_\#(u + tv) - f_\#(u)| |v| \right) dt \\ &\leq \int_0^1 |f_\#(u + tv) - f_\#(u)|_{\frac{2^*}{2^*-1}} |v|_{2^*} dt \\ &\leq C_N \left(\int_0^1 |f_\#(u + tv) - f_\#(u)|_{\frac{2^*}{2^*-1}} dt \right) \|v\|. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|\Phi(u + v) - \Phi(u) - \int_{\Omega} f_\#(u)v|}{\|v\|} = C_N \lim_{v \rightarrow 0} \int_0^1 |f_\#(u + tv) - f_\#(u)|_{\frac{2^*}{2^*-1}} dt.$$

Probaremos que este límite es 0. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\sigma \in (0, 2^* - 1]$, de los Teoremas 3.20 y 4.7 y la desigualdad de Hölder se sigue que la composición

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega) \xrightarrow{f_\#} L^{2^*/\sigma}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*/(2^*-1)}(\Omega) \quad (4.3)$$

es continua. Por tanto existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in [0, 1]$,

$$|f_{\#}(u + tv) - f_{\#}(u)|_{\frac{2^*}{2^*-1}} < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|v\| < \delta.$$

Esto implica que

$$\int_0^1 |f_{\#}(u + tv) - f_{\#}(u)|_{\frac{2^*}{2^*-1}} dt < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|v\| < \delta,$$

lo que demuestra que

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|\Phi(u + v) - \Phi(u) - \int_{\Omega} f_{\#}(u)v|}{\|v\|} = 0.$$

Claramente, la función $T : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Tv := \int_{\Omega} f_{\#}(u)v$$

es lineal. Además es continua, ya que

$$|Tv| \leq C_N |f_{\#}(u)|_{\frac{2^*}{2^*-1}} \|v\|.$$

En consecuencia, Φ es diferenciable y

$$\Phi'(u)v = \int_{\Omega} f_{\#}(u)v.$$

Probaremos ahora que

$$\Phi' : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{B}(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}) =: H^{-1}(\Omega)$$

es continua. Si $u_k \rightarrow u$ en $H_0^1(\Omega)$ entonces, puesto que

$$\begin{aligned} \frac{|\Phi'(u_k)v - \Phi'(u)v|}{\|v\|} &\leq \frac{\int_{\Omega} |f_{\#}(u_k) - f_{\#}(u)| |v|}{\|v\|} \\ &\leq \frac{C_N |f_{\#}(u_k) - f_{\#}(u)|_{\frac{2^*}{2^*-1}} \|v\|}{\|v\|} = C_N |f_{\#}(u_k) - f_{\#}(u)|_{\frac{2^*}{2^*-1}} \end{aligned}$$

y la composición (4.3) es continua, se tiene que

$$\|\Phi'(u_k) - \Phi'(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{|\Phi'(u_k)v - \Phi'(u)v|}{\|v\|} \leq C_N |f_{\#}(u_k) - f_{\#}(u)|_{\frac{2^*}{2^*-1}} \rightarrow 0.$$

Esto prueba que Φ es de clase $\mathcal{C}^1$. ■

Ejercicio 4.9 Sean Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, y $F \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Denotamos por $f(x, s) := \frac{\partial F}{\partial s}(x, s)$. Si existen $c > 0$ y $\sigma \in (1, \frac{N+2}{N-2}]$ tales que

$$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(x, s) \right| \leq c(|s|^{\sigma-1} + 1) \quad \forall (x, s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

entonces la función

$$\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(u) := \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx,$$

está bien definida, es de clase $\mathcal{C}^2$ y

$$\Phi''(u)(v, w) = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(\cdot, u)(v, w).$$

4.1.3. Variedades de Hilbert

Sean $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto de un espacio de Hilbert H y $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Dado $c \in \mathbb{R}$ denotamos por

$$F^{-1}(c) := \{u \in \mathcal{O} : F(u) = c\}.$$

Definición 4.10 $a \in \mathbb{R}$ es un **valor regular de F** si $\nabla F(u) \neq 0$ para todo $u \in F^{-1}(a)$. $a \in \mathbb{R}$ es un **valor crítico de F** si no es un valor regular de F .

Definición 4.11 Diremos que un subconjunto no vacío $\mathcal{M}$ de H es una **subvariedad de clase $\mathcal{C}^k$ de H** si $\mathcal{M}$ es cerrado en H y existen un subconjunto abierto $\mathcal{O}$ de H , una función $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^k$ y un valor regular a de F tales que

$$\mathcal{M} = F^{-1}(a).$$

Si además $\mathcal{M}$ es un subconjunto cerrado de H diremos que $\mathcal{M}$ es una **subvariedad de Hilbert de H** .

Si $u \in \mathcal{M}$, el subespacio

$$T_u \mathcal{M} := \{v \in H : \langle \nabla F(u), v \rangle = 0\} = \ker F'(u)$$

de H se llama el **espacio tangente a $\mathcal{M}$ en u** .

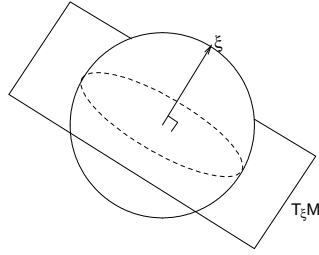
En realidad, el concepto de variedad de Hilbert es bastante más amplio que el que damos aquí, pero éste es suficiente para nuestros fines. Observa que, por ser un subespacio cerrado de H , $\mathcal{M}$ es un espacio métrico completo.

Ejercicio 4.12 *Prueba que la esfera unitaria*

$$S_H := \{u \in H : \|u\| = 1\}$$

es una subvariedad de clase $\mathcal{C}^\infty$ de H y que

$$T_u S_H = \{v \in H : \langle u, v \rangle = 0\}.$$



Sea $\Gamma_u(\mathcal{M})$ el conjunto de todas las trayectorias $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow H$ de clase $\mathcal{C}^1$ tales que $\sigma(0) = u$ y $\sigma(t) \in \mathcal{M}$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. El teorema de la función implícita [21, (10.2.1)] permite describir al espacio tangente como el conjunto de las velocidades en 0 de dichas curvas, es decir,

$$T_u \mathcal{M} = \{\sigma'(0) : \sigma \in \Gamma_u(\mathcal{M})\}.$$

En particular, $T_u \mathcal{M}$ no depende de F .

Los mínimos y los máximos de una función en una variedad tienen la siguiente propiedad.

Proposición 4.13 *Si $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{M}$ es una subvariedad de H de clase $\mathcal{C}^1$ y u es un mínimo (o un máximo) de J en $\mathcal{M}$, entonces*

$$\langle \nabla J(u), v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_u \mathcal{M}.$$

Demostración: Sean $v \in T_u \mathcal{M}$ y $\sigma \in \Gamma_u(\mathcal{M})$ tal que $\sigma'(0) = v$. Si u es un mínimo de J en $\mathcal{M}$, entonces 0 es un mínimo de $J \circ \sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$. Por tanto,

$$0 = (J \circ \sigma)'(0) = J'(\sigma(0))(\sigma'(0)) = J'(u)v = \langle \nabla J(u), v \rangle,$$

como afirma el enunciado. Análogamente para un máximo. ■

Definición 4.14 Sean $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ y $\mathcal{M}$ una subvariedad de H de clase $\mathcal{C}^1$. Un punto $u \in \mathcal{M}$ es un **punto crítico de J sobre $\mathcal{M}$** si

$$\langle \nabla J(u), v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_u \mathcal{M}. \quad (4.4)$$

Si $\mathcal{M} = H$ se dice simplemente que u es un **punto crítico de J** y la condición (4.4) equivale a que $\nabla J(u) = 0$.

$c \in \mathbb{R}$ es un **valor crítico de J sobre $\mathcal{M}$** si $c = J(u)$ para algún punto crítico u de J sobre $\mathcal{M}$. Si no es así, se dice que c es un **valor regular de J sobre $\mathcal{M}$** .

La Proposición 4.13 afirma que los máximos y mínimos son puntos críticos de J en $\mathcal{M}$.

Ejercicio 4.15 (Multiplicador de Lagrange) Prueba que u es un punto crítico de J en $\mathcal{M}$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla J(u) = \lambda \nabla F(u),$$

donde F es como en la Definición 4.11.

4.2. Un problema de Dirichlet semilineal

En toda esta sección supondremos que Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\lambda \in (-\lambda_1(\Omega), \infty)$ y $p \in (2, 2^*]$, donde $\lambda_1(\Omega)$ es el primer valor propio de Dirichlet de $-\Delta$ en Ω y $2^* := \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev.

Nuestro objetivo es probar que, si $p < 2^*$, el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2} u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.5)$$

tiene al menos una solución.

4.2.1. Formulación variacional del problema

El mismo procedimiento que empleamos en la Sección 2.3 nos lleva a la noción de solución débil para este problema. Ya que en este curso no nos ocuparemos de soluciones clásicas, la llamaremos simplemente una solución.

Definición 4.16 Una solución de (4.5) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.6)$$

Inspirados en el principio de Dirichlet, consideramos el funcional $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned} J(u) &: = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p \\ &= \frac{1}{2} \|u\|_{\lambda}^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p. \end{aligned} \quad (4.7)$$

El Corolario 3.19 garantiza que este funcional está bien definido. A J se le llama el **funcional de energía** asociado al problema (4.5). Su relación con dicho problema está dada por la siguiente proposición.

Proposición 4.17 *J es de clase $\mathcal{C}^2$ y*

$$J'(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_{\Omega} uv - \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.8)$$

En consecuencia, u es solución del problema (4.5) si y sólo si u es punto crítico de J .

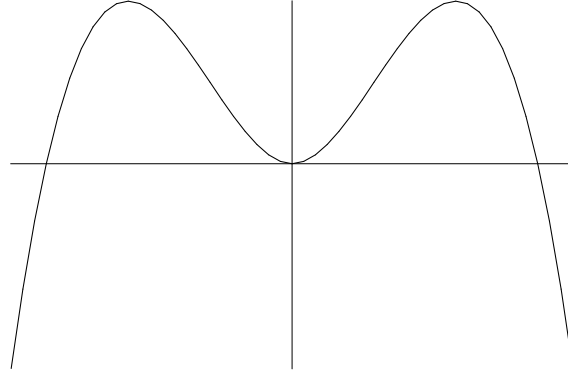
Demostración: Es consecuencia inmediata de los Ejercicios 3.21, 4.5 y 4.9 y el Teorema 4.8 que el funcional J es de clase $\mathcal{C}^2$ y que su derivada es la que afirma el enunciado. Por definición, u es punto crítico de J si y sólo si $J'(u)v = 0$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, es decir, si y sólo si u es solución de (4.5). ■

4.2.2. La gráfica del funcional de energía

Para estudiar los puntos críticos de J conviene analizar su gráfica. Para ello, fijemos una dirección $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, y veamos cómo es la gráfica de J sobre la recta generada por u . Es decir, consideremos la función $J_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$J_u(t) := J(tu) = \left(\frac{1}{2} \|u\|_{\lambda}^2 \right) t^2 - \left(\frac{1}{p} |u|_p^p \right) |t|^p. \quad (4.9)$$

Como hemos supuesto que $p > 2$, la gráfica de esta función tendrá la siguiente forma:



Puedes cerciorarte de esta afirmación resolviendo el siguiente ejercicio elemental.

Ejercicio 4.18 *Dados números reales $a, b > 0$, $p > 2$, considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(t) = at^2 - b|t|^p.$$

Calcula los puntos críticos y los valores críticos de f .

Observa que J no está acotada inferiormente y que tiene un mínimo local en 0. Obviamente, 0 es una solución del problema (4.5). Nos interesa saber si este problema tiene una solución no trivial.

Denotemos por t_u al único máximo de J_u en $(0, \infty)$. Los puntos críticos no triviales de J están contenidos en el conjunto $\{t_u u : u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_\lambda = 1\}$. A dicho conjunto se le llama la variedad de Nehari.

4.2.3. La variedad de Nehari

El conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0, J'(u)u = 0\} \\ &= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0, \|u\|_\lambda^2 = |u|_p^p\}. \end{aligned}$$

contiene obviamente a todos los puntos críticos no triviales de J . Tiene las siguientes propiedades:

Proposición 4.19 *(a) Existe $d_0 > 0$ tal que $\|u\|_\lambda \geq d_0$ para todo $u \in \mathcal{N}$. En consecuencia, $\mathcal{N}$ es un subconjunto cerrado de $H_0^1(\Omega)$.*

(b) $\mathcal{N}$ es una subvariedad de Hilbert de clase $\mathcal{C}^2$ de $H_0^1(\Omega)$ y se llama la **variedad de Nehari**.

(c) $u \notin T_u \mathcal{N}$ para toda $u \in \mathcal{N}$.

(d) Para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, existe un único $t_u \in (0, \infty)$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$. Más aún, t_u es el único punto en $(0, \infty)$ para el que cumple que

$$\max_{t \geq 0} J(tu) = J(t_u u).$$

Demostración: (a): De la desigualdad de Poincaré (Teorema 3.20), dado que las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\lambda$ son equivalentes (Ejercicio 3.21), se sigue que existe $C > 0$ tal que

$$|u|_p \leq C \|u\|_\lambda \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Por tanto,

$$C^{-p} \leq \frac{\|u\|_\lambda^p}{|u|_p^p} = \|u\|_\lambda^{p-2} \quad \forall u \in \mathcal{N},$$

es decir,

$$0 < d_0 := C^{-p/(p-2)} \leq \|u\|_\lambda \quad \forall u \in \mathcal{N}.$$

En consecuencia,

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_\lambda \geq d_0 \text{ y } \|u\|_\lambda^2 - |u|_p^p = 0\},$$

que es claramente un subconjunto cerrado de $H_0^1(\Omega)$.

(b) y (c): Considera la función $\Psi : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Psi(u) = \|u\|_\lambda^2 - |u|_p^p.$$

Entonces $\mathcal{N} = \Psi^{-1}(0)$, Ψ es de clase $\mathcal{C}^2$ y su derivada está dada por

$$\Psi'(u)v = 2\langle u, v \rangle_\lambda - p \int_\Omega |u|^{p-2} uv \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Además, 0 es un valor regular de Ψ ya que

$$\Psi'(u)u = 2\|u\|_\lambda^2 - p|u|_p^p = (2-p)\|u\|_\lambda^2 \neq 0 \quad \forall u \in \mathcal{N}.$$

Esto prueba que $\mathcal{N}$ es una variedad de clase $\mathcal{C}^2$ y que $u \notin \ker \Psi'(u) =: T_u \mathcal{N}$.

(d): Sea $0 \neq u \in H_0^1(\Omega)$ y sea $J_u : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$J_u(t) = J(tu) = \left(\frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2\right) t^2 - \left(\frac{1}{p} |u|_p^p\right) t^p.$$

Esta función tiene un único punto crítico en $(0, \infty)$ y éste es un máximo (Ejercicio 4.18). Además para $t \in (0, \infty)$ se cumple que

$$J'_u(t) = J'(tu)u = 0 \iff J'(tu)tu = 0 \iff tu \in \mathcal{N}.$$

Es decir, J_u tiene un máximo en t si y sólo si $tu \in \mathcal{N}$. Esto prueba (d). ■

Observa que

$$J(u) = \frac{p-2}{2p} \|u\|_\lambda^2 = \frac{p-2}{2p} |u|_p^p \quad \forall u \in \mathcal{N}. \quad (4.10)$$

De la proposición anterior concluimos lo siguiente.

Corolario 4.20 (a) $\inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) > 0$.

(b) Si $u \in \mathcal{N}$ es un punto crítico de J sobre $\mathcal{N}$, entonces u es un punto crítico no trivial de $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ y, en consecuencia, una solución no trivial del problema (4.5).

Demostración: La afirmación (a) es consecuencia inmediata de la identidad (4.10) y la Proposición 4.19.

(b): Si $u \in \mathcal{N}$ es un punto crítico de J sobre $\mathcal{N}$, entonces

$$J'(u)v = 0 \quad \forall v \in T_u\mathcal{N}.$$

Además, de la definición de $\mathcal{N}$ se sigue que $J'(u)u = 0$. Como el complemento ortogonal de $T_u\mathcal{N}$ en $H_0^1(\Omega)$ tiene dimensión 1 y $u \notin T_u\mathcal{N}$ (Proposición 4.19), se tiene que $H_0^1(\Omega) = T_u\mathcal{N} \oplus \{tu : t \in \mathbb{R}\}$. En consecuencia,

$$J'(u)v = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

es decir, u es un punto crítico de $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. ■

4.2.4. Existencia de mínimos

El corolario anterior nos sugiere investigar si J alcanza su mínimo en $\mathcal{N}$. Si $\mathcal{N}$ fuera compacta la respuesta sería claramente afirmativa, ya que toda función continua en un compacto alcanza sus valores extremos. Pero $\mathcal{N}$ no es compacta. De hecho, $\mathcal{N}$ es homeomorfa a la esfera unitaria en $H_0^1(\Omega)$ y la esfera unitaria en un espacio de dimensión infinita nunca es compacta [11, Teorema VI.5].

En la demostración de la siguiente proposición jugará un papel fundamental el teorema de Rellich-Kondrashov.

Proposición 4.21 *Si $p \in (2, 2^*)$ entonces J alcanza su mínimo en $\mathcal{N}$.*

Demostración: Sea $u_k \in \mathcal{N}$ tal que $J(u_k) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) =: c > 0$. Observa que, como $u_k \in \mathcal{N}$,

$$J(u_k) = \frac{p-2}{2p} \|u_k\|_\lambda^2 = \frac{p-2}{2p} |u_k|_p^p.$$

Así que la sucesión (u_k) está acotada en $H_0^1(\Omega)$ y contine, por tanto, una subsucesión - a la que, por simplicidad, denotaremos del mismo modo - tal que

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega).$$

Más aún, como $p < 2^*$, aplicando el teorema de Rellich-Kondrashov (Teorema 3.23), podemos suponer que dicha subsucesión cumple además que

$$u_k \rightarrow u \quad \text{fuertemente en } L^p(\Omega).$$

En consecuencia, $\frac{p-2}{2p} |u_k|_p^p \rightarrow \frac{p-2}{2p} |u|_p^p = c > 0$, así que $u \neq 0$.

La Proposición 4.19(d) asegura entonces que existe $t \in (0, \infty)$ tal que $tu \in \mathcal{N}$ y, como $u_k \in \mathcal{N}$, se cumple además que $J(tu_k) \leq J(u_k)$. Usando estos hechos obtenemos

$$\begin{aligned} c &\leq J(tu) = \frac{1}{2} \|tu\|_\lambda^2 - \frac{1}{p} |tu|_p^p \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \|tu_k\|_\lambda^2 \right) + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p} |tu_k|_p^p \right) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \|tu_k\|_\lambda^2 - \frac{1}{p} |tu_k|_p^p \right) \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} J(tu_k) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = c. \end{aligned}$$

En consecuencia, $J(tu) = c$, es decir, J alcanza su mínimo en $\mathcal{N}$.

Más aún, como

$$0 < c = \frac{p-2}{2p} |tu|_p^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p-2}{2p} |tu_k|_p^p = |t|_p^p c,$$

concluimos que $t = 1$ y, como

$$c = \frac{p-2}{2p} \|u\|_\lambda^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{p-2}{2p} \|u_k\|_\lambda^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p-2}{2p} \|u_k\|_\lambda^2 = c,$$

se tiene además que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_\lambda^2 = \|u\|_\lambda^2$. Por tanto, $u_k \rightarrow u$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$ y $J(u) = c$. ■

Teorema 4.22 (Existencia de una solución) Si Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\lambda \in (-\lambda_1(\Omega), \infty)$ y $p \in (2, 2^*)$, el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2} u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene al menos una solución no trivial.

Demostración: Este resultado es consecuencia inmediata de las Proposiciones 4.21 y 4.13 y el Corolario 4.20. ■

4.2.5. Existencia de soluciones positivas

El siguiente resultado, publicado en [9], asegura en particular que la solución dada por el Teorema 4.22 no cambia de signo.

Proposición 4.23 (Benci-Cerami 1991) Si $u \in \mathcal{N}$ es un punto crítico de J tal que

$$J(u) < 2 \inf_{v \in \mathcal{N}} J(v)$$

entonces, o bien $u \geq 0$, o bien $u \leq 0$ c.d. en Ω .

Demostración: Sea $u \in \mathcal{N}$ un punto crítico de J . Tomando $v = u^+ := \max\{u, 0\}$ en la identidad (4.8) y usando el Ejercicio 2.32 concluimos que

$$0 = J'(u)u^+ = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (u^+) + \lambda \int_{\Omega} u (u^+) - \int_{\Omega} |u|^{p-2} u (u^+) = \|u^+\|_{\lambda}^2 - |u^+|_p^p.$$

Análogamente, tomando $v = u^- := \min\{u, 0\}$ obtenemos que $\|u^-\|_{\lambda}^2 = |u^-|_p^p$.

Ahora, argumentando por contradicción, supongamos que $u^+ \neq 0$ y $u^- \neq 0$. Entonces $u^+, u^- \in \mathcal{N}$ y, por consiguiente,

$$J(u^+) \geq \inf_{v \in \mathcal{N}} J(v) \quad \text{y} \quad J(u^-) \geq \inf_{v \in \mathcal{N}} J(v).$$

Dado que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} |\nabla(u^+)|^2 + \int_{\Omega} |\nabla(u^-)|^2 \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} |u|^q = \int_{\Omega} |u^+|^q + \int_{\Omega} |u^-|^q$$

para $q = 2, p$, concluimos que

$$J(u) = J(u^+) + J(u^-) \geq 2 \inf_{v \in \mathcal{N}} J(v).$$

Esto contradice nuestra hipótesis. Por tanto, o bien $u^+ = 0$, o bien $u^- = 0$. ■

Capítulo 5

La teoría de Lusternik-Schnirelmann

El objetivo de este capítulo es probar que, si Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\lambda \in (-\lambda_1(\Omega), \infty)$ y $p \in (2, 2^*)$, el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2} u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene una infinidad de soluciones.

Probaremos que el funcional J definido en el capítulo anterior tiene una infinidad de puntos críticos sobre la variedad de Nehari.

5.1. El flujo en variedades

5.1.1. El problema de Cauchy

Sean H un espacio de Hilbert y $\mathcal{M}$ una subvariedad de Hilbert de clase $\mathcal{C}^1$ de H .

Definición 5.1 *Un campo tangente a $\mathcal{M}$ es una función $\chi : \mathcal{M} \rightarrow H$ tal que $\chi(u) \in T_u\mathcal{M}$ para todo $u \in \mathcal{M}$. El campo χ es **localmente Lipschitz** si para cada $u \in \mathcal{M}$ existen $r > 0$ y $C > 0$ (que dependen de u) tales que*

$$\|\chi(v) - \chi(w)\| \leq C \|v - w\| \quad \forall v, w \in B_r(u),$$

donde $B_r(u) = \{v \in \mathcal{M} : \|v - u\| < r\}$.

Ejercicio 5.2 *Prueba que, si $\mathcal{O}$ es abierto en H y $\chi : \mathcal{O} \rightarrow H$ es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces $\chi : \mathcal{O} \rightarrow H$ es localmente Lipschitz. (Sugerencia: Usa el teorema del valor medio [21].)*

El teorema de existencia y unicidad de soluciones para el problema de Cauchy sobre una variedad de Hilbert juega un papel fundamental en el estudio de problemas variacionales.

Teorema 5.3 (Existencia y unicidad global) *Sea $\chi : \mathcal{M} \rightarrow H$ un campo localmente Lipschitz tangente a $\mathcal{M}$. Entonces, para cada $u \in \mathcal{M}$, existe un intervalo abierto $\mathcal{I}(u) := (t^-(u), t^+(u))$ que contiene al origen y una única función $\sigma(\cdot, u) : \mathcal{I}(u) \rightarrow \mathcal{M}$ de clase $\mathcal{C}^1$ que es solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t, u) = \chi(\sigma(t, u)), \\ \sigma(0, u) = u. \end{cases} \quad (5.1)$$

El intervalo $\mathcal{I}(u)$ es máximo, es decir, $\sigma(\cdot, u)$ no se puede extender a una solución definida en un intervalo más grande.

Si $\|\chi(\sigma(t, u))\| \leq C < \infty$ para todo $t \in [0, T^+(u))$, entonces $T^+(u) = \infty$. La afirmación análoga vale para $T^-(u)$.

El dominio de σ ,

$$\mathcal{D} := \{(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M} : t \in \mathcal{I}(u)\},$$

es abierto en $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ y la función $\sigma : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}$, definida por (5.1), es continua.

*La función $\sigma : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}$ se llama el **flujo generado por χ** . Si $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathcal{M}$ se dice que el flujo es **global**.*

La demostración es idéntica a la del caso $\mathcal{M} = H$; puedes seguir por ejemplo la expuesta en [1]. Es importante notar que $\mathcal{M}$ es un espacio métrico completo (por ser un subconjunto cerrado de un espacio completo). Este hecho es crucial en la demostración.

Ejercicio 5.4 (a) *Prueba que $\sigma(t, u) = u$ para todo $t \in \mathcal{I}(u)$ si y sólo si $\chi(u) = 0$. Un punto u con estas propiedades se llama un **punto estacionario** del flujo.*

(b) *Prueba que, si u es un punto estacionario, entonces $\mathcal{I}(u) = \mathbb{R}$.*

Ejercicio 5.5 *Sea $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ el campo vectorial $\chi(u) = u^2$.*

(a) *Prueba que a función*

$$\sigma(t, u) := \begin{cases} \frac{1}{(1/u)-t} & \text{si } u \neq 0, \\ 0 & \text{si } u = 0, \end{cases}$$

es la solución del problema de Cauchy (5.1).

(b) *Calcula el intervalo máximo de existencia de la solución para cada $u \in \mathbb{R}$.*

(c) *Calcula el dominio $\mathcal{D}$ de σ .*

5.1.2. El flujo gradiente negativo

Supongamos ahora que $\mathcal{M}$ es una subvariedad de Hilbert de clase $\mathcal{C}^2$ de H y que $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Fijemos una función $\Psi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ clase $\mathcal{C}^2$, definida en una vecindad $\mathcal{O}$ de $\mathcal{M}$ en H , tal que $\mathcal{M} = \Psi^{-1}(a_0)$ para un valor regular a_0 de Ψ .

Definición 5.6 *El campo gradiente de J sobre $\mathcal{M}$ es aquél que se obtiene proyectando ortogonalmente a $\nabla J(u)$ sobre $T_u\mathcal{M}$ para cada $u \in \mathcal{M}$, es decir,*

$$\nabla_{\mathcal{M}}J(u) := \nabla J(u) - \frac{\langle \nabla J(u), \nabla \Psi(u) \rangle}{\|\nabla \Psi(u)\|^2} \nabla \Psi(u).$$

Tomando $\mathcal{O}$ más pequeña en caso necesario, podemos suponer sin perder generalidad que $\nabla \Psi(u) \neq 0$ para todo $u \in \mathcal{O}$. El Ejercicio 5.2 asegura entonces que $\nabla_{\mathcal{M}}J$ es localmente Lipschitz.

Definición 5.7 *El flujo gradiente negativo de J sobre $\mathcal{M}$ es la solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t, u) = -\nabla_{\mathcal{M}}J(\sigma(t, u)), \\ \sigma(0, u) = u. \end{cases}$$

Observa que $\nabla_{\mathcal{M}}J(u) = 0$ si y sólo si u es un punto crítico de J sobre $\mathcal{M}$. Es decir, los puntos críticos de J sobre $\mathcal{M}$ son los puntos estacionarios del flujo gradiente negativo de J sobre $\mathcal{M}$.

Para cada $u \in \mathcal{M}$ se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J(\sigma(t, u)) &= \langle \nabla J(\sigma(t, u)), \frac{d}{dt}\sigma(t, u) \rangle \\ &= \langle \nabla J(\sigma(t, u)), -\nabla_{\mathcal{M}}J(\sigma(t, u)) \rangle \\ &= -\|\nabla_{\mathcal{M}}J(\sigma(t, u))\|^2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

En consecuencia, la función $t \mapsto J(\sigma(t, u))$ es decreciente.

5.2. La categoría de Lusternik-Schnirelmann

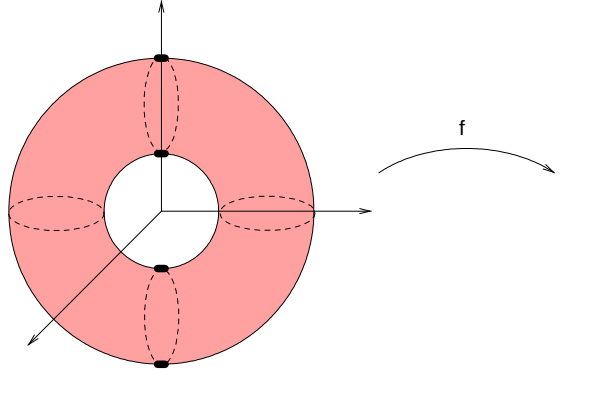
5.2.1. Motivación

El problema que nos interesa es el siguiente: ¿Cómo podemos obtener una cota inferior para el número de puntos críticos de una función diferenciable sobre una variedad? Empecemos mirando un ejemplo.

Denotemos por $\mathcal{T}$ al toro de revolución en $\mathbb{R}^3$ que se obtiene rotando al círculo $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + (x_2 - 2)^2 = 1, x_3 = 0\}$ alrededor del eje- x_1 y consideremos la función

$f(x_1, x_2, x_3) = x_3$. Los puntos críticos de f en $\mathcal{T}$ son aquéllos puntos x en los que el plano tangente a $\mathcal{T}$ es perpendicular a $\nabla f(x) = (0, 0, 1)$. Es decir, los puntos

$$\xi_1 = (0, 0, -3), \quad \xi_2 = (0, 0, -1), \quad \xi_3 = (0, 0, 1), \quad \xi_4 = (0, 0, 3).$$



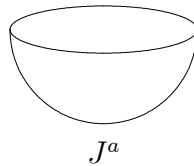
Denotemos por $c_i := f(\xi_i)$ a los valores críticos.

Intuitivamente, podemos visualizar al flujo gradiente negativo de f sobre $\mathcal{T}$ como sigue: si colocamos una gotita de aceite sobre un punto x del toro, el camino que describe al escurrir sobre la superficie del toro es el que describe la trayectoria $t \mapsto \sigma(t, x)$ del flujo gradiente negativo (pero la velocidad es distinta, ya que las trayectorias del flujo no alcanzan a llegar a los puntos críticos).

Para cada $a \in \mathbb{R}$ considera el conjunto de subnivel

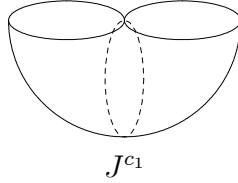
$$f^a := \{x \in \mathcal{T} : f(x) \leq a\}.$$

Observa que, para todos los valores $a \in (c_1, c_2)$, los conjuntos f^a son homeomorfos a un disco:



En cambio, J^{c_2} es topológicamente distinto a J^a , pues mientras que, siguiendo el flujo gradiente negativo, podemos contraer J^a al punto ξ_1 , no es posible contraer J^{c_2} a un

punto, de ningún modo, sin salirnos de $\mathcal{T}$!



Observa que los valores críticos son justamente aquéllos para los cuales J^c es topológicamente distinto a $J^{c-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Nota también que, si le quitamos a J^{c_i} una vecindad suficientemente pequeña $B_\delta(\xi_i)$ de ξ_i , el flujo transporta a $J^{c_i+\varepsilon} \setminus B_\delta(\xi_i)$ dentro $J^{c_i-\varepsilon}$. De este modo, podemos descomponer a $\mathcal{T}$ como sigue: para $\delta > 0$ suficientemente pequeña consideremos los conjuntos

$$U_i := \{x \in \mathcal{T} : \sigma(t, x) \in B_\delta(\xi_i) \text{ para algún } t \in [0, \infty)\},$$

donde $B_\delta(\xi_i) := \{x \in \mathcal{T} : |x - \xi_i| < \delta\}$. Estos conjuntos resultan ser abiertos en $\mathcal{T}$ y cubren a $\mathcal{T}$, es decir, $\mathcal{T} = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$. Más aún, siguiendo el flujo podemos deformar a cada U_i dentro de $B_\delta(\xi_i)$ que, a su vez, se deforma en ξ_i .

Inspirados en esta idea Lusternik y Schnirelmann definieron un invariante que proporciona una cota inferior para el número de puntos críticos de una función sobre una variedad en términos de la topología de ésta.

5.2.2. El teorema de Lusternik-Schnirelmann

Empecemos precisando los conceptos topológicos que acabamos de usar. Sean X un espacio topológico, A y B subconjuntos de X .

Definición 5.8 *A es deformable a B en X si existe una función continua $\eta : [0, 1] \times A \rightarrow X$ tal que $\eta(0, x) = x$ y $\eta(1, x) \in B$ para todo $x \in A$. Si A es deformable a un punto en X decimos que A es **contraíble en X** . La función η se llama una **deformación de A a B en X** .*

Ejercicio 5.9 *Prueba que la esfera unitaria $\mathbb{S}^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$ es contraíble en $\mathbb{R}^N$ (¡pero no es contraíble en sí misma!).*

Ejercicio 5.10 *Prueba que, si $\eta : [0, 1] \times A \rightarrow X$ es una deformación de A a B en X y U es contraíble en X , entonces $\{x \in A : \eta(1, x) \in U\}$ es contraíble en X .*

A principios del siglo pasado Lusternik y Schnirelmann introdujeron el siguiente invariante que hoy lleva sus nombres.

Definición 5.11 *La categoría de Lusternik-Schnirelmann de A en X es el mínimo número de subconjuntos $U_1, \dots, U_k$ abiertos de X que son contraíbles en X y que cubren a A , es decir, $A \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$. Dicho número se denota*

$$\text{cat}_X(A), \quad \text{cat}(X) := \text{cat}_X(X).$$

Si no existe un número finito de subconjuntos de X con esas propiedades, se define $\text{cat}_X(A) := \infty$.

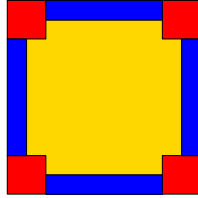
Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 5.12 *Si $\mathbb{S}^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$ es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^N$ entonces $\text{cat}(\mathbb{S}^{N-1}) = 2$.*

Demostración: Los conjuntos $U_+ := \{x \in \mathbb{S}^{N-1} : x_N \neq 1\}$ y $U_- := \{x \in \mathbb{S}^{N-1} : x_N \neq -1\}$ son abiertos, contraíbles y cubren a $\mathbb{S}^{N-1}$. De modo que, $\text{cat}(\mathbb{S}^{N-1}) \leq 2$. Como $\mathbb{S}^{N-1}$ no es contraíble en sí mismo, concluimos que $\text{cat}(\mathbb{S}^{N-1}) = 2$. ■

Ejemplo 5.13 $\text{cat}(\mathcal{T}) = 3$.

Demostración: $\mathcal{T}$ se obtiene identificando los lados opuestos del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. La descomposición del cuadrado que se ilustra en la siguiente figura

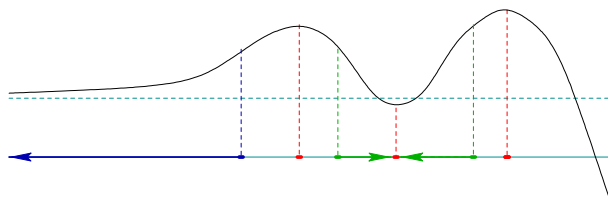


da lugar a una descomposición de $\mathcal{T}$ en tres abiertos, las regiones roja, azul y amarilla respectivamente, cada una de las cuales es contraíble en $\mathcal{T}$. De modo que $\text{cat}(\mathcal{T}) \leq 3$. Obtener una cota inferior es más complicado. Usando métodos de topología algebraica, como los descritos en [30], se prueba que $\text{cat}(\mathcal{T}) \geq 3$. ■

En [39] Lusternik y Schnirelmann demuestran el siguiente resultado.

Teorema 5.14 (Lusternik-Schnirelmann ~1930) *Si $\mathcal{M}$ es una subvariedad compacta de clase $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^N$, cualquier función $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ tiene al menos $\text{cat}(\mathcal{M})$ puntos críticos sobre $\mathcal{M}$.*

Su demostración se basa en las ideas que describimos cuando analizamos la función $f(x_1, x_2, x_3) = x_3$ en el toro $\mathcal{T}$. El punto crucial es el siguiente: si $\mathcal{M}$ es una subvariedad compacta de clase $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^N$ y $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2$, las trayectorias del flujo gradiente negativo de f sobre $\mathcal{M}$ tienden siempre a algún punto crítico de f sobre $\mathcal{M}$ cuando $t \rightarrow \infty$. Esto no necesariamente ocurre cuando la variedad no es compacta. Por ejemplo, si $\mathcal{M} = \mathbb{R}$, todas las trayectorias del flujo gradiente negativo de la función exponencial $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tienden a $-\infty$. La siguiente figura ilustra el comportamiento de las trayectorias del flujo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en distintos puntos: los puntos rojos son estacionarios, las trayectorias de los puntos verdes tienden a un mínimo, mientras que la trayectoria del punto azul tiende a $-\infty$.



El Teorema 5.14 no es cierto si $\mathcal{M}$ no es compacta, pues $\text{cat}(\mathbb{R}) = 1$ pero la función exponencial no tiene ningún punto crítico. Por otra parte, si $\mathcal{M}$ es compacta, forzosa-mente es de dimensión finita. De modo que el Teorema 5.14 no se aplica a la situación que nos interesa. El objetivo de la siguiente sección es dar condiciones que nos permitan extender este resultado.

5.3. Multiplicidad de puntos críticos

En lo sucesivo $\mathcal{M}$ denotará a una subvariedad de Hilbert de clase $\mathcal{C}^2$ de un espacio de Hilbert H , $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ a una función de clase $\mathcal{C}^2$ y $\nabla_{\mathcal{M}} J$ al gradiente de J sobre $\mathcal{M}$.

5.3.1. El lema de deformación

A principios de los años 60's Palais y Smale observaron que, si bien no es posible extender el teorema de Lusternik-Schnirelmann de modo tal que $\text{cat}(\mathcal{M})$ sea una cota inferior para el número de puntos críticos de cualquier función en $\mathcal{M}$, sí lo es si nos restringimos a funciones adecuadas, es decir, a aquéllas cuyo flujo gradiente negativo tiende a algún punto crítico.

La siguiente condición fue introducida por Palais y Smale en [44], donde la llamaron la condición (C). En la actualidad lleva su nombre.

Definición 5.15 *Una sucesión que cumple*

$$u_k \in \mathcal{M}, \quad J(u_k) \rightarrow c \quad y \quad \nabla_{\mathcal{M}} J(u_k) \rightarrow 0,$$

se llama una **sucesión de Palais-Smale para J sobre $\mathcal{M}$ en c** . Se dice que J satisface la **condición de Palais-Smale** $(PS)_{\mathcal{M},c}$ si toda sucesión de este tipo contiene una subsucesión convergente en H . Diremos simplemente que J satisface la **condición de Palais-Smale sobre $\mathcal{M}$** si cumple $(PS)_{\mathcal{M},c}$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Nota que, como $\mathcal{M}$ es cerrada en H , el límite u de tal subsucesión pertenece a $\mathcal{M}$ y es un punto crítico de J sobre $\mathcal{M}$, ya que $\nabla_{\mathcal{M}}J$ es continuo. Observa además que, si $\mathcal{M}$ es compacta, cualquier J satisface esta condición. Esto no es cierto en general: la sucesión $u_k := -k$ es de Palais-Smale para la función exponencial $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y no contiene ninguna subsucesión convergente.

Para $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ denotamos

$$\begin{aligned} J^{-1}X & : = \{u \in \mathcal{M} : J(u) \in X\}, \\ J^a & : = \{u \in \mathcal{M} : J(u) \leq a\}, \\ K_a & : = \{u \in \mathcal{M} : J(u) = a, \nabla_{\mathcal{M}}J(u) = 0\}, \\ B_\delta(K_a) & : = \{u \in \mathcal{M} : \text{dist}(u, K_a) < \delta\}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde

$$\text{dist}(u, A) := \inf\{\|u - v\| : v \in A\} \quad \text{si } A \neq \emptyset, \quad \text{y} \quad \text{dist}(u, \emptyset) := \infty.$$

Se cumple lo siguiente.

Lema 5.16 (a) Si J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$ entonces K_c es compacto (posiblemente vacío).
(b) Si J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$ para todo $c \in [a, b]$, con $-\infty < a \leq b < \infty$, entonces, dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|\nabla_{\mathcal{M}}J(u)\| \geq \frac{\varepsilon}{\delta} \quad \forall u \in J^{-1}[a - \varepsilon, b + \varepsilon] \setminus \bigcup_{c \in [a, b]} B_\delta(K_c).$$

Demostración: La afirmación (a) es consecuencia inmediata de $(PS)_{\mathcal{M},c}$.

(b): Argumentando por contradicción, supongamos que existe una sucesión (u_k) tal que

$$u_k \in \mathcal{M} \setminus \bigcup_{c \in [a, b]} B_\delta(K_c), \quad J(u_k) \in [a - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k}], \quad \|\nabla_{\mathcal{M}}J(u_k)\| < \frac{1}{\delta k}.$$

Esta sucesión contiene una subsucesión (u_{k_j}) tal que $J(u_{k_j}) \rightarrow c \in [a, b]$ y, como J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$, ésta contiene a su vez una subsucesión que converge a un punto $u \in K_c \cap (\mathcal{M} \setminus B_\delta(K_c))$, lo cual es una contradicción. ■

Proposición 5.17 (Lema de deformación) (a) Si J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$ entonces, dada $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $J^{c+\varepsilon} \setminus B_{3\delta}(K_c)$ es deformable a $J^{c-\varepsilon}$ en $\mathcal{M}$.
 (b) Si J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$ y $K_c = \emptyset$ para todo $c \geq a$, entonces $\mathcal{M}$ es deformable a J^a en $\mathcal{M}$.

Demostración: (a): El Lema 5.16 asegura que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|\nabla_{\mathcal{M}} J(u)\| \geq \frac{2\varepsilon}{\delta} \quad \forall u \in J^{-1}[c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon] \setminus B_{\delta}(K_c).$$

Sean

$$A := (\mathcal{M} \setminus J^{-1}[c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cup B_{\delta}(K_c), \quad B := J^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \setminus B_{2\delta}(K_c).$$

La función $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(u) := \frac{\text{dist}(u, A)}{\text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B)}.$$

es localmente Lipschitz y cumple que $\rho(u) = 1$ si $u \in B$ y $\rho(u) = 0$ si $u \in A$. El campo vectorial

$$\chi(u) := \begin{cases} -\rho(u) \frac{\nabla_{\mathcal{M}} J(u)}{\|\nabla_{\mathcal{M}} J(u)\|^2} & \text{si } \nabla_{\mathcal{M}} J(u) \neq 0, \\ 0 & \text{si } u \in A, \end{cases}$$

es localmente Lipschitz y tangente a $\mathcal{M}$, y cumple que $\|\chi(u)\| \leq \frac{\delta}{2\varepsilon}$ para todo $u \in \mathcal{M}$. En consecuencia, el flujo generado por χ es global, es decir, existe una función continua $\sigma : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ tal que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \sigma(t, u) = \chi(\sigma(t, u)), \\ \sigma(0, u) = u. \end{cases}$$

Observa que

$$\frac{d}{dt} J(\sigma(t, u)) = \left\langle \nabla J(\sigma(t, u)), \frac{d}{dt} \sigma(t, u) \right\rangle = \langle \nabla J(\sigma(t, u)), \chi(\sigma(t, u)) \rangle = -\rho(\sigma(t, u)). \quad (5.4)$$

Así que, como $\rho \geq 0$, $J(\sigma(t, u))$ es decreciente en t . Definimos $\eta(s, u) := \sigma(2\varepsilon s, u)$. Entonces $\eta(0, u) = u$ para todo $u \in \mathcal{M}$. Sea $u \in J^{c+\varepsilon} \setminus B_{3\delta}(K_c)$. Consideramos dos casos:

- (1) Si $\eta(s, u) \in J^{c-\varepsilon}$ para algún $s \in [0, 1]$ entonces, puesto que $J(\eta(s, u))$ es decreciente en s , se tiene que $\eta(1, u) \in J^{c-\varepsilon}$.
- (2) Si $\eta(s, u) \in J^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ para todo $s \in [0, 1]$, del teorema del valor medio [14, Teorema 9.14] se sigue que

$$\|\sigma(t, u) - u\| \leq \max_{s \in [0, t]} \left\| \frac{d}{ds} \sigma(s, u) \right\| t \leq \frac{\delta t}{2\varepsilon} \leq \delta \quad \forall t \in [0, 2\varepsilon].$$

Como $u \notin B_{3\delta}(K_c)$, la desigualdad anterior implica que $\sigma(t, u) \in B$ para todo $t \in [0, 2\varepsilon]$ y usando (5.4) concluimos que

$$J(\sigma(2\varepsilon, u)) - J(u) = \int_0^{2\varepsilon} \frac{d}{ds} J(\sigma(s, u)) ds = - \int_0^{2\varepsilon} \rho(\sigma(s, u)) ds = -2\varepsilon.$$

Por tanto, $J(\eta(1, u)) = J(u) - 2\varepsilon \leq c - \varepsilon$ y η es la deformación deseada.

(b): El Lema 5.16 asegura que existe $d < a$ tal que $\nabla_{\mathcal{M}} J(u) \neq 0$ si $J(u) \geq d$. Sea $\varrho \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \varrho \leq 1$, $\varrho(x) = 0$ si $x \leq d$ y $\varrho(x) = 1$ si $x \geq a$. Definimos

$$\chi(u) := \begin{cases} -\varrho(J(u)) \frac{\nabla_{\mathcal{M}} J(u)}{\|\nabla_{\mathcal{M}} J(u)\|^2} & \text{si } J(u) \geq d, \\ 0 & \text{si } J(u) \leq d, \end{cases}$$

y denotamos por σ al flujo asociado a χ . Observa que

$$\frac{d}{dt} J(\sigma(t, u)) = \left\langle \nabla J(\sigma(t, u)), \frac{d}{dt} \sigma(t, u) \right\rangle = \langle \nabla J(\sigma(t, u)), \chi(\sigma(t, u)) \rangle = -\varrho(J(\sigma(t, u))). \quad (5.5)$$

para todo $t \in [0, t^+(u))$. En consecuencia, $J(\sigma(t, u))$ es decreciente en t para $t \in [0, t^+(u))$.

Sea $u \in \mathcal{M}$ con $J(u) \geq d$. El Lema 5.16 asegura que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|\nabla_{\mathcal{M}} J(v)\| \geq \varepsilon$ para todo $v \in J^{-1}[d - \varepsilon, J(u) + \varepsilon]$. Por tanto, $\|\chi(v)\| \leq 1/\varepsilon$ para todo $v \in J^{-1}(-\infty, J(u) + \varepsilon]$. En particular,

$$\|\chi(\sigma(t, u))\| \leq 1/\varepsilon \quad \forall t \in [0, t^+(u)).$$

Esto prueba que $t^+(u) = \infty$ para todo $u \in \mathcal{M}$.

Definimos

$$\tau(u) := \max\{J(u) - a, 0\} \quad \text{y} \quad \eta(s, u) := \sigma(s\tau(u), u).$$

Entonces $\eta : [0, 1] \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ está bien definida, es continua y $\eta(0, u) = u$. Si $J(\eta(1, u)) = J(\sigma(\tau(u), u)) \geq a$, entonces $J(\sigma(t, u)) \geq a$ para $t \in [0, \tau(u)]$ y la identidad (5.5) implica que

$$J(\sigma(\tau(u), u)) - J(u) = - \int_0^{\tau(u)} \varrho(J(\sigma(t, u))) dt = -\tau(u) = -J(u) + a.$$

Por tanto, $J(\eta(1, u)) = a$ y η es la deformación deseada. ■

Ejercicio 5.18 *Prueba que los campos $\chi : \mathcal{M} \rightarrow H$ definidos en la demostración de cada una de las afirmaciones (a) y (b) de la proposición anterior son localmente Lipschitz.*

5.3.2. El teorema de Lusternik-Schnirelmann en variedades de Hilbert

Usaremos el lema de deformación para extender el Teorema 5.14. Empezaremos probando algunas propiedades de la categoría. Para enunciarlas requerimos la siguiente definición.

Definición 5.19 *Un espacio métrico Y es un **retracto absoluto de vecindad** (ANR) si para cualquier función continua $f : A \rightarrow Y$ definida en un subconjunto cerrado A de un espacio métrico X existen una vecindad U de A en X y una función continua $F : U \rightarrow Y$ tal que $F|_A = f$.*

Ejercicio 5.20 *Prueba que cualquier subconjunto abierto de un ANR es un ANR y que todo retracto de un subconjunto abierto de un ANR es un ANR.*

El teorema de extensión de Tietze-Urysohn asegura que $\mathbb{R}^N$ es un ANR. Puedes consultar este resultado en [21]. Dado que toda subvariedad de clase $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^N$ es retracto de una vecindad tubular, resulta también ser un ANR. Lo mismo vale para variedades de Hilbert:

Proposición 5.21 *Toda subvariedad de clase $\mathcal{C}^1$ de un espacio de Hilbert es un ANR.*

Demostración: Consulta [41]. ■

Un subconjunto Z de X es **localmente cerrado en X** si es la intersección de un subconjunto abierto y un subconjunto cerrado de X .

Lema 5.22 *Si X es un ANR y Z es localmente cerrado y contraíble en X , entonces Z tiene una vecindad contraíble en X .*

Demostración: Sean U un subconjunto abierto de X tal que Z es cerrado en U y $\eta : [0, 1] \times Z \rightarrow X$ una deformación de Z a un punto x_0 en X . Definimos $Y := ([0, 1] \times Z) \cup (\{0, 1\} \times U)$ y $f : Y \rightarrow X$ como

$$\begin{aligned} f(t, z) &:= \eta(t, z) && \text{si } (t, z) \in [0, 1] \times Z, \\ f(0, x) &:= x, \quad f(1, x) &:= x_0, && \text{si } x \in X. \end{aligned}$$

Como Y es cerrado en $[0, 1] \times U$, existen un abierto W en $[0, 1] \times U$ que contiene a Y y una función continua $F : W \rightarrow X$ tal que $F|_Y = f$. Para probar la afirmación del lema bastará probar que existe una vecindad V de Z en X tal que $[0, 1] \times V \subset W$ pues, en tal caso, $F|_{[0, 1] \times V}$ es una deformación de V a x_0 en X .

Ahora bien, como W es abierto en $[0, 1] \times X$, para cada $(t, z) \in [0, 1] \times Z$ existen abiertos $I_{(t,z)}$ en $[0, 1]$ y $V_{(t,z)}$ en X tales que $(t, z) \in I_{(t,z)} \times V_{(t,z)} \subset W$. Puesto que $[0, 1] \times \{z\}$ es compacto, existen $t_1, \dots, t_m \in [0, 1]$, tales que

$$[0, 1] \times \{z\} \subset \bigcup_{i=1}^m (I_{(t_i,z)} \times V_{(t_i,z)})$$

y, en consecuencia, $[0, 1] \times \{z\} \subset [0, 1] \times V_z$ donde $V_z := \bigcap_{i=1}^m V_{(t_i,z)}$ es abierto en X . Así, $V := \bigcup_{z \in Z} V_z$ es abierto en X , contiene a Z y $[0, 1] \times V \subset W$. ■

Proposición 5.23 *Sean X un ANR y $A, B \subset X$. Entonces cat_X tiene las siguientes propiedades:*

- (1) NO TRIVIALIDAD: $\text{cat}_X(A) = 0$ si y sólo si $A = \emptyset$.
- (2) SUBADITIVIDAD: $\text{cat}_X(A \cup B) \leq \text{cat}_X(A) + \text{cat}_X(B)$.
- (3) MONOTONÍA BAJO DEFORMACIONES: Si A es cerrado y es deformable a B en X , entonces $\text{cat}_X(A) \leq \text{cat}_X(B)$.
- (4) CONTINUIDAD: Si A es cerrado en X , existe una vecindad U de A en X tal que $\text{cat}_X(U) = \text{cat}_X(A)$.
- (5) FINITUD: Si $A = \{x\}$ entonces $\text{cat}_X(A) = 1$. Si A es compacto entonces $\text{cat}_X(A) < \infty$.

Demostración: Las primeras dos propiedades son inmediatas. Probemos las restantes.

(3): Sea $\eta : [0, 1] \times A \rightarrow X$ una deformación de A a B en X . Si $\text{cat}_X(B) = \infty$ no hay nada que probar. Si $\text{cat}_X(B) = k < \infty$, existen k subconjuntos $U_1, \dots, U_k$ abiertos y contraíbles en X que cubren a B . Sea $A_i := \{x \in A : \eta(1, x) \in U_i\}$. Observa que $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$ y, como A_i es abierto en A , es localmente cerrado en X . Por otra parte, dado que U_i es contraíble en X , existe una deformación $\theta_i : [0, 1] \times U_i \rightarrow X$ a un punto x_i de X . Definimos $\tilde{\theta}_i : [0, 1] \times A_i \rightarrow X$ como

$$\tilde{\theta}_i(t, x) := \begin{cases} \eta(2t, x) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] , \\ \theta_i(2t - 1, \eta(1, x)) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] . \end{cases}$$

Entonces $\tilde{\theta}_i$ es una deformación de A_i a x_i en X . El Lema 5.22 asegura que existe un abierto contraíble V_i en X que contiene a A_i . En consecuencia, $A \subset V_1 \cup \dots \cup V_k$, lo que prueba que $\text{cat}_X(A) \leq k = \text{cat}_X(B)$.

(4): Por la propiedad anterior, $\text{cat}_X(A) \leq \text{cat}_X(B)$ si $A \subset B$. De modo que, si $\text{cat}_X(A) = \infty$, cualquier vecindad de A cumple lo que queremos. Si $\text{cat}_X(A) = k < \infty$ y $U_1, \dots, U_k$ son subconjuntos abiertos y contraíbles en $\mathcal{M}$ que cubren a A , entonces $U := U_1 \cup \dots \cup U_k$ es una vecindad de A y $\text{cat}_X(U) = \text{cat}_X(A)$.

(5): Si $x \in X$, el Lema 5.22 asegura que existe un subconjunto U_x abierto contraíble en X que contiene a x . Por tanto, $\text{cat}_X(\{x\}) = 1$. Más aún, si A es compacto, la cubierta $\{U_x : x \in A\}$ de A contiene una subcubierta finita. Por tanto, $\text{cat}_X(A) < \infty$. ■

En [16] puedes encontrar otros ejemplos de invariantes que satisfacen las propiedades anteriores. Estas propiedades, junto con el lema de deformación, permiten demostrar el siguiente teorema; compara el enunciado de éste con el del teorema original de Palais en [42].

Teorema 5.24 (Palais 1966) *Si J está acotada inferiormente en $\mathcal{M}$ y satisface la condición de Palais-Smale sobre $\mathcal{M}$, entonces*

$$\text{cat}(\mathcal{M}) \leq \sum_{c \in \mathbb{R}} \text{cat}_{\mathcal{M}}(K_c), \quad (5.6)$$

donde $K_c := \{u \in \mathcal{M} : J(u) = c, \nabla_{\mathcal{M}} J(u) = 0\}$. En particular, J tiene al menos $\text{cat}(\mathcal{M})$ puntos críticos sobre $\mathcal{M}$.

Más aún, si $\text{cat}(\mathcal{M}) = \infty$, entonces el conjunto de valores críticos de J sobre $\mathcal{M}$ no está acotado.

Demostración: Sea $\Gamma := \{c \in \mathbb{R} : K_c \neq \emptyset\}$ el conjunto de valores críticos de J sobre $\mathcal{M}$. Si Γ no está acotado, la desigualdad (5.6) se satisface trivialmente. Si Γ está acotado, escogemos $\alpha < \inf_{\mathcal{M}} J$ y $\beta > \sup \Gamma$. Entonces $\text{cat}_{\mathcal{M}}(J^\alpha) = 0$ y el lema de deformación implica que $\text{cat}(\mathcal{M}) = \text{cat}_{\mathcal{M}}(J^\beta)$.

Para cada $c \in \mathbb{R}$ escogemos una vecindad U de K_c en $\mathcal{M}$ tal que $\text{cat}_{\mathcal{M}}(K_c) = \text{cat}_{\mathcal{M}}(U)$. Como K_c es compacto, existe $\delta > 0$ tal que $B_{3\delta}(K_c) \subset U$. El lema de deformación asegura que existe $\varepsilon > 0$ tal que $J^{c+\varepsilon} \setminus B_{3\delta}(K_c)$ es deformable $J^{c-\varepsilon}$ en $\mathcal{M}$ y, usando las propiedades de la categoría, concluimos que

$$\text{cat}_{\mathcal{M}}(J^{c+\varepsilon}) \leq \text{cat}_{\mathcal{M}}(J^{c+\varepsilon} \setminus B_{3\delta}(K_c)) + \text{cat}_{\mathcal{M}}(B_{3\delta}(K_c)) \leq \text{cat}_{\mathcal{M}}(J^{c-\varepsilon}) + \text{cat}_{\mathcal{M}}(K_c).$$

Los intervalos $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ construidos de esta manera forman una cubierta abierta de $\mathbb{R}$, así que hay un número finito ellos que cubre a $[\alpha, \beta]$. Escogemos $c_1, c_2, \dots, c_k \in [\alpha, \beta]$ y $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k > 0$ de modo que $c_1 = \alpha$, $c_k = \beta$,

$$\begin{aligned} c_{j+1} - \varepsilon_{j+1} &\leq c_j + \varepsilon_j & \forall j = 1, \dots, k-1, \\ \text{cat}_{\mathcal{M}}(J^{c_j+\varepsilon_j}) &\leq \text{cat}_{\mathcal{M}}(J^{c_j-\varepsilon_j}) + \text{cat}_{\mathcal{M}}(K_{c_j}) & \forall j = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Iterando las desigualdades (5.7) obtenemos

$$\text{cat}(\mathcal{M}) = \text{cat}_{\mathcal{M}}(J^\beta) \leq \text{cat}_{\mathcal{M}}(J^\alpha) + \sum_{j=1}^k \text{cat}_{\mathcal{M}}(K_{c_j}) = \sum_{j=1}^k \text{cat}_{\mathcal{M}}(K_{c_j}) < \infty.$$

Esto demuestra la desigualdad (5.6), y prueba que Γ no está acotado si $\text{cat}(\mathcal{M}) = \infty$. Finalmente, como la cardinalidad de K_{c_j} es al menos $\text{cat}_{\mathcal{M}}(K_{c_j})$, concluimos que J tiene al menos $\text{cat}(\mathcal{M})$ puntos críticos en $\mathcal{M}$. ■

Con este hermoso resultado en la mano, volvamos al problema que nos interesa. Para aplicar el Teorema 5.24 al problema (5.10) tenemos que calcular la categoría de Lusternik-Schnirelmann de la variedad de Nehari. Observa que ésta es homeomorfa a la esfera $S_\lambda := \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_\lambda = 1\}$. En efecto: la función $h : S_\lambda \rightarrow \mathcal{N}$ dada por

$$h(u) := \frac{u}{|u|_p^{p/(p-2)}}$$

es un homeomorfismo cuyo inverso es $h^{-1}(u) = \frac{u}{\|u\|_\lambda}$.

Estas son malas noticias, ya que la esfera unitaria en cualquier espacio de Hilbert de dimensión infinita es contraíble, como se infiere de corolario del Teorema 15 en [41]. Por tanto, $\text{cat}(\mathcal{N}) = 1$. Es decir: el Teorema 5.24 no proporciona nuevas soluciones del problema (5.10).



Un aspecto de la variedad de Nehari y del funcional J definido en (4.7) que no hemos tomado en cuenta aún son sus simetrías. A continuación estudiaremos el efecto de las simetrías sobre el número de puntos críticos.

5.4. Puntos críticos de funciones simétricas

Como antes, $\mathcal{M}$ denotará a una subvariedad de clase $\mathcal{C}^2$ de un espacio de Hilbert H , $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ a una función de clase $\mathcal{C}^2$ y $\nabla_{\mathcal{M}} J$ al gradiente de J sobre $\mathcal{M}$.

Supondremos además que $\mathcal{M}$ es **simétrica**, en el sentido de la Definición 5.25, que **no contiene al origen**, y que J es una función **par**, es decir,

$$J(u) = J(-u) \quad \forall u \in H.$$

5.4.1. El lema de deformación simétrico

Definición 5.25 *Un subconjunto $\mathcal{S}$ de un espacio vectorial es **simétrico** si cumple que*

$$u \in \mathcal{S} \iff -u \in \mathcal{S}.$$

*Una función $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ entre dos subconjuntos simétricos $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ es **impar** si*

$$f(-u) = -f(u) \quad \forall u \in \mathcal{S}_1.$$

Si $\mathcal{M}$ es simétrica y J es una función par, el gradiente de J sobre $\mathcal{M}$ resulta ser impar, es decir,

$$\nabla_{\mathcal{M}} J(-u) = -\nabla_{\mathcal{M}} J(u) \quad \forall u \in \mathcal{M}$$

y, en consecuencia, el flujo gradiente negativo σ es impar en u , es decir,

$$\sigma(t, -u) = -\sigma(t, u) \quad \forall (t, u) \in \mathcal{D}. \quad (5.8)$$

Esta última afirmación es consecuencia inmediata de la unicidad de la solución para el problema de Cauchy. En general, se cumple lo siguiente:

Ejercicio 5.26 *Prueba que, si $\chi : \mathcal{M} \rightarrow H$ es un campo localmente Lipschitz tangente a $\mathcal{M}$ y χ es impar, entonces el flujo generado por χ satisface (5.8).*

Observa además que los conjuntos definidos en (5.3) son simétricos. Las observaciones anteriores permiten refinar el lema de deformación como sigue.

Proposición 5.27 (Lema de deformación simétrico) (a) *Si J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$ entonces, dada $\delta > 0$ existen $\varepsilon > 0$ y una función impar $f : J^{c+\varepsilon} \setminus B_{3\delta}(K_c) \rightarrow J^{c-\varepsilon}$.*
 (b) *Si J satisface $(PS)_{\mathcal{M},c}$ y $K_c = \emptyset$ para todo $c \geq a$, entonces existe una función impar $f : \mathcal{M} \rightarrow J^a$.*

Demostración: Basta observar que, si $\mathcal{M}$ es simétrica y J es par, las deformaciones que construimos en la demostración de la Proposición 5.17 cumplen que

$$\eta(t, -u) = -\eta(t, u) \quad \forall t \in [0, 1], u \in \mathcal{M}.$$

Esto se prueba fácilmente usando el Ejercicio 5.26. En ambos casos, la función $f(u) := \eta(1, u)$ cumple lo que queremos. ■

Observa que en ambos casos existe una deformación impar, pero no nos hará falta hacer uso de ella.

Ejercicio 5.28 *Demuestra en detalle la proposición anterior.*

5.4.2. El género de Krasnoselskii, simetrías y puntos críticos

A mediados de los años 50's Krasnoselskii introdujo un invariante adecuado para tratar problemas simétricos. La definición que daremos a continuación es distinta de la que dió Krasnoselskii en [35]. Veremos más adelante que ambas definiciones coinciden.

Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto simétrico de H .

Definición 5.29 El *género de Krasnoselskii* de $\mathcal{S}$ es el mínimo número de subconjuntos $U_1, \dots, U_m$ simétricos y abiertos en $\mathcal{S}$ que cubren a $\mathcal{S}$, para los cuales existe una función continua e impar $\alpha_i : U_i \rightarrow \{1, -1\}$. Dicho número se denota

$$\text{gen}(\mathcal{S}).$$

Si no existen subconjuntos con esas propiedades, definimos $\text{gen}(\mathcal{S}) := \infty$.

Ejemplo 5.30 Si $\mathbb{S}^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$, entonces $\text{gen}(\mathbb{S}^{m-1}) \leq m$.

Demostración: Para cada $i = 1, \dots, m$ el conjunto $U_i := \{x \in \mathbb{S}^{m-1} : x_i \neq 0\}$ es simétrico y abierto en $\mathbb{S}^{m-1}$ y la función $\alpha_i : U_i \rightarrow \{1, -1\}$ dada por

$$\alpha_i(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x_i > 0, \\ -1 & \text{si } x_i < 0, \end{cases}$$

es continua e impar. Claramente, $\mathbb{S}^{m-1} = U_1 \cup \dots \cup U_m$. ■

Ejemplo 5.31 Si $0 \in \mathcal{S}$ entonces $\text{gen}(\mathcal{S}) := \infty$.

Demostración: Si $0 \in U$, no existe ninguna función impar $U \rightarrow \{1, -1\}$. ■

Lema 5.32 (a) Si Z es simétrico y localmente cerrado en H y $\alpha : Z \rightarrow \{1, -1\}$ es continua e impar, entonces existen V simétrico y abierto en H y $\beta : V \rightarrow \{1, -1\}$ continua e impar tales que $Z \subset V$ y $\beta|_Z = \alpha$.

(b) Si $\mathcal{S}$ es simétrico y cerrado en H y $\text{gen}(\mathcal{S}) < \infty$, entonces $\text{gen}(\mathcal{S})$ es el mínimo número de subconjuntos $V_1, \dots, V_m$ simétricos y abiertos en H que cubren a $\mathcal{S}$, para los cuales existe una función continua e impar $\beta_i : V_i \rightarrow \{1, -1\}$.

Demostración: (a): Sea U abierto en H tal que $Z \subset U$ y Z es cerrado en U . El teorema de extensión de Tietze-Urysohn asegura que existe una función continua $\tilde{\alpha} : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\alpha}(z) = \alpha(z)$ para todo $z \in Z$. El conjunto

$$V := \{u \in U : -u \in U, \tilde{\alpha}(u) \neq \tilde{\alpha}(-u)\}$$

es simétrico y es un subconjunto abierto de H que contiene a Z . La función

$$\beta(u) := \frac{\tilde{\alpha}(u) - \tilde{\alpha}(-u)}{|\tilde{\alpha}(u) - \tilde{\alpha}(-u)|}$$

es impar y continua, y coincide con α en Z .

La afirmación (b) es consecuencia inmediata de (a), pues si U_i es abierto en $\mathcal{S}$ entonces es localmente cerrado en H . ■

Proposición 5.33 Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{R}$ subconjuntos simétricos de H . El género de Krasnoselskii tiene las siguientes propiedades:

- (1) NO TRIVIALIDAD: $\text{gen}(\mathcal{S}) = 0$ si y sólo si $\mathcal{S} = \emptyset$.
- (2) SUBADITIVIDAD: Si $\mathcal{S}$ y $\mathcal{R}$ son cerrados, entonces $\text{gen}(\mathcal{S} \cup \mathcal{R}) \leq \text{gen}(\mathcal{S}) + \text{gen}(\mathcal{R})$.
- (3) MONOTONÍA: Si existe una función continua e impar $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ entonces $\text{gen}(\mathcal{S}) \leq \text{gen}(\mathcal{R})$.
- (4) CONTINUIDAD: Si $\mathcal{S}$ es cerrado, existe una vecindad simétrica $\mathcal{U}$ de $\mathcal{S}$ en H tal que $\text{gen}(\mathcal{U}) = \text{gen}(\mathcal{S})$.
- (5) FINITUD: Si $\mathcal{S}$ es compacto y no contiene al origen, entonces $\text{gen}(\mathcal{S}) < \infty$. Si $\mathcal{S}$ es finito y no contiene al origen, entonces $\text{gen}(\mathcal{S}) = 1$.

Demostración: Las propiedades (1) y (3) son consecuencia inmediata de la Definición 5.29. Las propiedades (2), (4) y (5) son consecuencia del Lema 5.32. ■

Ejercicio 5.34 Demuestra en detalle las afirmaciones (1) a (5) de la proposición anterior.

La Proposición 5.33, junto con el lema de deformación simétrico, permiten demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.35 Si $\mathcal{M}$ es simétrica y no contiene al origen, J es par, está acotada inferiormente en $\mathcal{M}$ y satisface la condición de Palais-Smale sobre $\mathcal{M}$, entonces

$$\text{gen}(\mathcal{M}) \leq \sum_{c \in \mathbb{R}} \text{gen}(K_c),$$

donde $K_c := \{u \in \mathcal{M} : J(u) = c, \nabla_{\mathcal{M}} J(u) = 0\}$. En particular, J tiene al menos $\text{gen}(\mathcal{M})$ pares de puntos críticos $\pm u$ sobre $\mathcal{M}$.

Más aún, si $\text{gen}(\mathcal{M}) = \infty$, entonces el conjunto de valores críticos de J sobre $\mathcal{M}$ no está acotado.

Demostración: La demostración es formalmente idéntica a la del Teorema 5.24. ■

El teorema anterior es válido para simetrías más generales que las que hemos considerado aquí; lo que puedes constatar si consultas [17].

Ejercicio 5.36 Demuestra en detalle el Teorema 5.35.

5.4.3. Calculando el género

La siguiente caracterización del género es la definición que dió Krasnoselskii en [35].

Proposición 5.37 *Sea $\mathcal{S}$ un subconjunto cerrado y simétrico de H y $m \in \mathbb{N}$. Entonces $\text{gen}(\mathcal{S}) \leq m$ si y sólo si existe una función impar y continua $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$.*

Demostración: Si existe una función impar y continua $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$, la monotonía del género y el Ejemplo 5.30 implican que

$$\text{gen}(\mathcal{S}) \leq \text{gen}(\mathbb{S}^{m-1}) \leq m.$$

Supongamos ahora que $\text{gen}(\mathcal{S}) \leq m$. Sean $U_1, \dots, U_m$ subconjuntos simétricos y abiertos en $\mathcal{S}$ tales que $\mathcal{S} = U_1 \cup \dots \cup U_m$, y $\alpha_i : U_i \rightarrow \{1, -1\}$ funciones impares y continuas. Definimos $\pi_i : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$ como sigue:

$$\pi_i(u) := \frac{\text{dist}(u, X \setminus U_i)}{\sum_{i=1}^m \text{dist}(u, X \setminus U_i)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Nota que el denominador es estrictamente positivo. La función π_i es continua y cumple que

$$\pi_i(u) = \pi_i(-u) \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^m \pi_i(u) = 1 \quad \forall u \in \mathcal{S}. \quad (5.9)$$

Sea $\{e_1, \dots, e_m\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^m$. La función $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ dada por

$$f(u) := \frac{\sum_{i=1}^m \pi_i(u) \alpha_i(u) e_i}{\left| \sum_{i=1}^m \pi_i(u) \alpha_i(u) e_i \right|}$$

está bien definida y es impar y continua. ■

Ejercicio 5.38 (a) Cerciórate de que π_i es continua y cumple (5.9).
(b) Cerciórate de que f está bien definida, es decir, comprueba que

$$\sum_{i=1}^m \pi_i(u) \alpha_i(u) e_i \neq 0 \quad \forall u \in \mathcal{S}.$$

Durante una plática que sostuvieron en el Café Escocés por el año de 1930, Borsuk y Ulam conjeturaron el siguiente resultado, que ahora conocemos como el teorema de Borsuk-Ulam. Fue Borsuk quien lo demostró en detalle y lo publicó en [10]. Lo usaremos para calcular el género de una esfera.

Teorema 5.39 (Borsuk-Ulam) *Si $k < m$ no existe ninguna función continua e impar $\mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^k$.*

Demostración: Consulta por ejemplo [47]. ■

Corolario 5.40 (a) $\text{gen}(\mathbb{S}^{m-1}) = m$.

(b) *Si H es un espacio de Hilbert de dimensión infinita y $S_H := \{u \in H : \|u\| = 1\}$ es la esfera unitaria, entonces $\text{gen}(S_H) = \infty$.*

Demostración: (a): El Ejemplo 5.30 asegura que $\text{gen}(\mathbb{S}^{m-1}) \leq m$. De la Proposición 5.37 y el teorema de Borsuk-Ulam se sigue que $\text{gen}(\mathbb{S}^{m-1}) \geq m$.

(b): Si $\dim H = \infty$ entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe una isometría lineal $\mathbb{R}^m \rightarrow H$. Ésta induce una función continua e impar $\mathbb{S}^{m-1} \rightarrow S_H$. Por tanto,

$$m = \text{gen}(\mathbb{S}^{m-1}) \leq \text{gen}(S_H)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Esto prueba que $\text{gen}(S_H) = \infty$. ■

Ejercicio 5.41 *Sea $\mathcal{T}$ el toro de revolución en $\mathbb{R}^3$ que se obtiene rotando al círculo $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + (x_2 - 2)^2 = 1, x_3 = 0\}$ alrededor del eje- x_1 . Prueba que $\mathcal{T}$ es simétrico y calcula su género.*

Ejercicio 5.42 *Prueba que cualquier función par $f : \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ tiene al menos m pares de puntos críticos $\pm\xi_1, \dots, \pm\xi_m$ sobre $\mathbb{S}^{m-1}$.*

5.5. Infinidad de soluciones de un problema de Dirichlet semilineal

Sean Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\lambda \in (-\lambda_1(\Omega), \infty)$ y $p \in (2, 2^*)$. Probaremos que el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.10)$$

tiene una infinidad de soluciones.

5.5.1. La condición de Palais-Smale

El producto escalar que le daremos a $H_0^1(\Omega)$ es el definido como

$$\langle u, v \rangle_\lambda := \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + \lambda uv) \quad (5.11)$$

y denotaremos por $\|\cdot\|_\lambda^2$ a la norma inducida por él. Recuerda que las soluciones no triviales de (5.10) son los puntos críticos del funcional $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p$$

sobre la variedad de Nehari

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0, \|u\|_\lambda^2 = |u|_p^p\} = \Psi^{-1}(0),$$

donde $\Psi : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función dada por

$$\Psi(u) = \|u\|_\lambda^2 - |u|_p^p.$$

Denotemos por ∇J y $\nabla \Psi$ a los gradientes de J y Ψ respecto al producto escalar (5.11), es decir,

$$\nabla J(u) = u - \nabla \Phi(u), \quad \nabla \Psi(u) = 2u - p \nabla \Phi(u)$$

donde

$$\Phi(u) := \frac{1}{p} |u|_p^p.$$

Entonces,

$$\langle \Phi(u), v \rangle_\lambda = \int_\Omega |u|^{p-2} uv \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

y usando las desigualdades de Hölder y Sobolev obtenemos

$$|\langle \nabla \Phi(u), v \rangle_\lambda| \leq \int_\Omega |u|^{p-1} |v| \leq |u|_p^{p-1} |v|_p \leq C |u|_p^{p-1} \|v\|_\lambda \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.12)$$

Remplazando v por $\nabla \Phi(u)$ en la desigualdad anterior concluimos que

$$\|\nabla \Phi(u)\|_\lambda \leq C |u|_p^{p-1} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (5.13)$$

Proposición 5.43 *J satisface la condición de Palais-Smale sobre $\mathcal{N}$.*

Demostración: Sea (u_k) una sucesión en $\mathcal{N}$ tal que $J(u_k) \rightarrow c$ y $\nabla_{\mathcal{N}} J(u_k) \rightarrow 0$. Entonces

$$\frac{p-2}{2p} \|u_k\|_{\lambda}^2 = \frac{p-2}{2p} |u_k|_p^p = J(u_k) \rightarrow c > 0,$$

y, como $\nabla_{\mathcal{N}} J(u_k) \rightarrow 0$ y (u_k) está acotada en $H_0^1(\Omega)$, se tiene que

$$\langle \nabla_{\mathcal{N}} J(u_k), u_k \rangle_{\lambda} \rightarrow 0. \quad (5.14)$$

Probaremos primero que $\nabla J(u_k) \rightarrow 0$. Expresamos $\nabla J(u_k)$ como

$$\nabla J(u_k) = \nabla_{\mathcal{N}} J(u_k) + t_k \nabla \Psi(u_k), \quad t_k \in \mathbb{R}. \quad (5.15)$$

Multiplicando esta igualdad escalarmente por u_k y usando la Proposición 4.19 concluimos que existe $c_1 > 0$ tal que

$$|\langle \nabla_{\mathcal{N}} J(u_k), u_k \rangle_{\lambda}| = |\langle \nabla J(u_k), u_k \rangle_{\lambda} - t_k \langle \nabla \Psi(u_k), u_k \rangle_{\lambda}| = |t_k| (p-2) \|u_k\|_{\lambda}^2 \geq c_1 |t_k|.$$

De modo que (5.14) implica que $t_k \rightarrow 0$. Por otra parte, usando la desigualdad (5.13), concluimos que existe una constante $c_2 > 0$ tal que

$$\|\nabla \Psi(u_k)\|_{\lambda} \leq 2\|u_k\|_{\lambda} + p\|\nabla \Phi(u_k)\|_{\lambda} \leq 2\|u_k\|_{\lambda} + pC|u_k|_p^{p-1} \leq c_2$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Así pues, como $(\nabla \Psi(u_k))$ está acotada, $\nabla_{\mathcal{N}} J(u_k) \rightarrow 0$ y $t_k \rightarrow 0$, de la identidad (5.15) se sigue que $\nabla J(u_k) \rightarrow 0$.

Probemos ahora que (u_k) contiene una subsucesión convergente. Los Teoremas 3.9 y 3.23 aseguran que (u_k) contiene una subsucesión - a la que seguimos denotando (u_k) para no complicar la notación - tal que

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega), \\ u_k &\rightarrow u \quad \text{fuertemente en } L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Se sigue entonces de (5.12) que

$$|\langle \nabla \Phi(u_k), u_k - u \rangle_{\lambda}| \leq |u_k|_p^{p-1} |u_k - u|_p \leq c_3 |u_k - u|_p \rightarrow 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \nabla J(u_k), u_k - u \rangle_{\lambda} = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_k, u_k - u \rangle_{\lambda} - \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \nabla \Phi(u_k), u_k - u \rangle_{\lambda} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_k, u_k - u \rangle_{\lambda} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{\lambda}^2 - \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_k, u \rangle_{\lambda} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{\lambda}^2 - \|u\|_{\lambda}^2. \end{aligned}$$

La Proposición 3.6 asegura entonces que

$$u_k \rightarrow u \quad \text{fuertemente en } H_0^1(\Omega),$$

lo que demuestra que J satisface la condición de Palais-Smale sobre $\mathcal{N}$. ■

5.5.2. Infinidad de soluciones

Estamos listos para probar el siguiente resultado.

Teorema 5.44 *Si Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\lambda \in (-\lambda_1(\Omega), \infty)$ y $p \in (2, 2^*)$, el problema (5.10) tiene una sucesión de soluciones (u_k) que satisfacen*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_\lambda^2 = \infty.$$

Demostración: Aplicaremos el Teorema 5.35. Observa que $0 \notin \mathcal{N}$ y que

$$u \in \mathcal{N} \Leftrightarrow -u \in \mathcal{N} \quad \text{y} \quad J(u) = J(-u) \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Las Propositiones 4.19 y 5.43 aseguran que J está acotada inferiormente en $\mathcal{N}$ y satisface la condición de Palais-Smale sobre $\mathcal{N}$. Sea $S_\lambda := \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_\lambda = 1\}$ la esfera unitaria. La función $h : S_\lambda \rightarrow \mathcal{N}$ dada por

$$h(u) := \frac{u}{|u|_p^{p/(p-2)}}$$

es impar y continua. Usando el Corolario 5.40 y la monotonía del género concluimos que

$$\infty = \text{gen}(S_\lambda) \leq \text{gen}(\mathcal{N}).$$

El Teorema 5.35 asegura entonces que J tiene una sucesión no acotada de valores críticos sobre $\mathcal{N}$, es decir, existe una sucesión de puntos críticos (u_k) de J sobre $\mathcal{N}$ tal que

$$J(u_k) = \frac{p-2}{2p} \|u_k\|_\lambda^2 \rightarrow \infty.$$

Esto concluye la demostración. ■

5.6. El principio variacional de Ekeland

5.7. Conclusiones

Para probar que el problema (5.10) tiene una infinidad de soluciones usamos dos hechos fundamentales:

- que el problema tiene simetrías, y
- que el funcional asociado satisface la condición de Palais-Smale.

Los siguientes comentarios ilustran algo de lo que ocurre cuando esto no se cumple.

5.7.1. Perturbación de simetrías

Una pregunta natural, que a la fecha carece de una respuesta adecuada, es: ¿Hasta que punto son importantes las simetrías para la existencia de una infinidad de soluciones? ¿No basta con que la complejidad de la gráfica del funcional de energía sea semejante a la provocada por las simetrías?

Un ejemplo bien interesante es el siguiente: considera el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u + f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.16)$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $p \in (2, 2^*)$ y $f \in L^2(\Omega)$. Éste es un problema variacional. Sus soluciones son los puntos críticos del funcional

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p - \int_{\Omega} fu$$

en $H_0^1(\Omega)$. No es difícil comprobar que este funcional satisface la condición de Palais-Smale. Observa, sin embargo, que no es un funcional par. Así que no es posible aplicar el Teorema 5.35 para obtener soluciones.

El primer resultado de multiplicidad para este problema lo obtuvieron independientemente Bahri y Beresticki [4] y Struwe [48] a principios de los años 80's: demostraron que para $p > 2$ suficientemente pequeña y cualquier $f \in L^2(\Omega)$ el problema tiene una infinidad de soluciones. El mejor resultado con el que se cuenta actualmente se debe a Bahri y Lions en [6], y es el siguiente:

Teorema 5.45 (Bahri-Lions 1988) *El problema (5.16) tiene una infinidad de soluciones para cualquier $f \in L^2(\Omega)$ si $p \in (2, (2N-2)/(N-2))$.*

Nota que $(2N-2)/(N-2) < 2^*$. Por otra parte, Bahri probó en [11] el siguiente resultado:

Teorema 5.46 (Bahri 1981) *Si $p \in (2, 2^*)$, el problema (5.16) tiene una infinidad de soluciones para casi toda $f \in L^2(\Omega)$, es decir, para toda f en un subconjunto denso de $L^2(\Omega)$.*

Este resultado induce a conjeturar lo siguiente:

Conjetura 5.47 *El problema (5.16) tiene una infinidad de soluciones para toda $f \in L^2(\Omega)$ y para todo $p \in (2, 2^*)$.*

Esta conjetura continúa siendo, a la fecha, un problema abierto.

5.7.2. Falta de compacidad

El teorema de Rellich-Kondrashov no es cierto si Ω no es acotado o $p \geq 2^*$. Esto impide extender los argumentos que usamos para probar los resultados de los capítulos anteriores. De hecho, esos resultados no son válidos en general. Estudiaremos estas dos situaciones en los siguientes capítulos.

Capítulo 6

Problemas elípticos en dominios no acotados

El objetivo de este capítulo es estudiar problemas del tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = |u|^{p-2}u, \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

donde Ω es un dominio exterior en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $p \in (2, 2^*)$ y $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y acotada tal que $\inf_{\mathbb{R}^N} V > 0$.

Un **dominio exterior** es un dominio cuyo complemento $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ es acotado, posiblemente vacío. Es decir, $\mathbb{R}^N$ mismo es un dominio exterior.

Los problemas elípticos en $\mathbb{R}^N$ son particularmente relevantes en física. ...

6.1. El problema autónomo

En toda esta sección supondremos que Ω es un dominio en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ y $p \in (2, 2^*)$. Nuestro primer objetivo es estudiar la existencia de soluciones al problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{p-2}u, \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (6.1)$$

cuando Ω es un dominio exterior.

6.1.1. Formulación variacional del problema

Definición 6.1 Una solución de (6.1) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Como en el caso de dominios acotados, consideramos el funcional $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|_1^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p, \quad (6.2)$$

donde

$$\|u\|_1^2 = \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) \right)^{1/2}, \quad |u|_p^p = \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{1/p},$$

son las normas en $H_0^1(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$ respectivamente. Este funcional es de clase $\mathcal{C}^2$ y su derivada está dada por

$$J'(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} uv - \int_{\Omega} |u|^{p-2} uv,$$

de modo que las soluciones del problema (6.1) son los puntos críticos de J . También en este caso

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0, J'(u)u = 0\} \\ &= \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0, \|u\|_1^2 = |u|_p^p\} \end{aligned}$$

es una variedad de clase $\mathcal{C}^2$ y las soluciones no triviales del problema (6.1) son los puntos críticos de la restricción de J a esta variedad, que se llama la variedad de Nehari.

Sin embargo, el argumento que usamos para demostrar la existencia de un punto crítico cuando Ω es acotado (ver subsección 4.2.4) no se puede aplicar cuando Ω es un dominio exterior, ya que el teorema de Rellich-Kondrashov no vale en ese caso.

Proposición 6.2 *Si Ω es un dominio exterior en $\mathbb{R}^N$, la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ no es un operador compacto.*

Demostración: Sean $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \neq 0$, y (ξ_k) una sucesión en Ω tal que $|\xi_k| \rightarrow \infty$. Definimos $\varphi_k(x) := \varphi(x - \xi_k)$. Nota que $\text{sop}(\varphi_k) \subset \Omega$ para k suficientemente grande, así que $\varphi_k \in H_0^1(\Omega)$ para tales k . Claramente $\|\varphi_k\|_1 = \|\varphi\|_1$ y $|\varphi_k|_p = |\varphi|_p$. Observa además que, si $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces ψ y φ_k tienen soportes ajenos para k suficientemente grande. En consecuencia,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi \varphi_k = 0 \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Si alguna subsucesión (φ_{k_j}) convergiese a v en $L^p(\Omega)$, tendríamos que

$$\int_{\Omega} \psi v = 0 \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Por tanto, $v = 0$. Pero también se tendría que

$$|v|_p = \lim_{j \rightarrow \infty} |\varphi_{k_j}|_p = |\varphi|_p \neq 0,$$

lo cual es una contradicción. En consecuencia, ninguna subsucesión de (φ_k) converge en $L^p(\Omega)$. ■

Más adelante veremos que, si Ω es un dominio exterior distinto de $\mathbb{R}^N$, J no alcanza su mínimo en $\mathcal{N}$.

6.1.2. Dominios simétricos

El espacio vectorial $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ de las funciones lineales de $\mathbb{R}^N$ en sí mismo es un espacio de Banach con la norma definida en (4.1). Identificándolo con el espacio de matrices de $N \times N$ de la manera usual, observamos que tiene dimensión finita N^2 , así que cualesquiera dos normas en él son equivalentes.

Denotaremos por $O(N)$ al grupo de todas las isometrías lineales de $\mathbb{R}^N$, es decir,

$$O(N) := \{g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) : |gx| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N\}$$

con la operación dada por la composición, a la que se suele denotar gh en vez de $g \circ h$.

Ejercicio 6.3 *Prueba que, si $g \in O(N)$, entonces*

$$(gx) \cdot (gy) = x \cdot y \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

donde $x \cdot y$ denota al producto escalar usual.

Proposición 6.4 *$O(N)$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. La composición*

$$O(N) \times O(N) \rightarrow O(N), \quad (g, h) \mapsto gh, \quad (6.3)$$

y la función

$$O(N) \rightarrow O(N), \quad g \mapsto g^{-1}, \quad (6.4)$$

son continuas.

Demostración: Si $g_k \in O(N)$ y $g_k \rightarrow g$ en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|g_k(x) - g(x)| \leq \|g_k - g\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} |x| \rightarrow 0.$$

Por tanto,

$$|g(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |g_k(x)| = |x|$$

y, en consecuencia, $g \in O(N)$. Esto prueba que $O(N)$ es cerrado. Por otra parte, $\|g\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \leq 1$ para todo $g \in O(N)$, así que $O(N)$ es acotado. Como $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ es de dimensión finita, el teorema de Heine-Borel asegura que $O(N)$ es compacto. Las otras dos afirmaciones se dejan como ejercicio. ■

A un espacio topológico que tiene una estructura de grupo tal que la multiplicación y la función que a cada elemento le asocia su inverso son continuas se le llama un **grupo topológico**. De modo que la proposición anterior asegura que $O(N)$ es un grupo topológico compacto. De hecho, es sencillo probar que $O(N)$ es una subvariedad de clase $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{N^2}$ y que las funciones antes mencionadas son de clase $\mathcal{C}^\infty$. Se dice entonces que $O(N)$ es un **grupo de Lie** compacto.

Ejercicio 6.5 *Prueba que la composición (6.3) y la función (6.4) son continuas.*

Dado un subgrupo G de $O(N)$ y un punto $x \in \mathbb{R}^N$ definimos la **G -órbita de x** como el conjunto

$$Gx := \{gx : g \in G\}.$$

Veamos algunos ejemplos. Denotaremos por

$$S_r^{N-1} := \{y \in \mathbb{R}^N : |y| = r\}$$

a la esfera con centro en el origen y radio r en $\mathbb{R}^N$.

Ejemplo 6.6 *Para cualquier subgrupo G de $O(N)$ la G -órbita de 0 es $\{0\}$.*

Ejemplo 6.7 *La $O(N)$ -órbita de $x \in \mathbb{R}^N$ es la esfera $S_{|x|}^{N-1}$.*

Ejemplo 6.8 *Si $N = m + n$, identificando a $(g, h) \in O(m) \times O(n)$ con la función*

$$(g, h)(x, y) = (gx, hy), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^N,$$

se tiene que $O(m) \times O(n)$ es un subgrupo cerrado de $O(N)$. La $[O(m) \times O(n)]$ -órbita de (x, y) es $S_{|x|}^{m-1} \times S_{|y|}^{n-1}$. Nota que no todas las $[O(m) \times O(n)]$ -órbitas son homeomorfas: la órbita de $(x, 0)$ es la esfera $S_{|x|}^{m-1} \times \{0\}$ y la de $(0, y)$ es la esfera $\{0\} \times S_{|y|}^{n-1}$, mientras que, si $xy \neq 0$, la órbita de (x, y) es un producto de esferas.

Ejemplo 6.9 *Sea $\mathbb{Z}/2 := \{I, -I\}$, donde I denota a la identidad, entonces $(\mathbb{Z}/2)x = \{x, -x\}$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.*

Ejemplo 6.10 Sea $\mathbb{S}^1 := \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de los números complejos unitarios. Si $N = 2m$, cada $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ define una transformación $e^{i\theta} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$, dada por

$$e^{i\theta}(z_1, \dots, z_m) := (e^{i\theta}z_1, \dots, e^{i\theta}z_m).$$

Identificando $\mathbb{R}^N \equiv \mathbb{C}^m$ de la manera obvia, se tiene que $\mathbb{S}^1$ es un subgrupo cerrado de $O(N)$. La $\mathbb{S}^1$ -órbita de $z \in \mathbb{C}^m$ es el círculo de radio $|z|$ en el espacio vectorial complejo generado por z (cuya dimensión real es 2).

Ejemplo 6.11 Sea $\mathbb{Z}/n := \{e^{2\pi ik/n} : k = 0, \dots, n-1\}$ el subgrupo cíclico de orden n de $\mathbb{S}^1$. Como en el ejemplo anterior, $\mathbb{Z}/n$ es un subgrupo cerrado de $O(N)$ para N par. La $\mathbb{Z}/n$ -órbita de $z \in \mathbb{C}^{N/2}$ es el conjunto de puntos $(\mathbb{Z}/n)z = \{e^{2\pi ik/n}z : k = 0, \dots, n-1\}$ sobre el círculo de radio $|z|$ en el espacio vectorial complejo generado por z .

Definición 6.12 Un subconjunto Z de $\mathbb{R}^N$ es *G-invariante* si $Gx \subset Z$ para todo $x \in Z$. Una función $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ es *G-invariante* si es constante en cada G-órbita de Z , es decir,

$$f(gz) = f(z) \quad \forall g \in G, \forall z \in Z.$$

A una función $O(N)$ -invariante se le llama simplemente *radial*.

Si Ω es G -invariante, para cada $g \in G$ y cada función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ denotamos por $gu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a la composición $gu := u \circ g^{-1}$, es decir,

$$(gu)(x) := u(g^{-1}x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (6.5)$$

Nota que

$$g(u+v) = gu + gv \quad \text{y} \quad g(\lambda u) = \lambda(gu) \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall g \in G.$$

Proposición 6.13 Si G es un subgrupo de $O(N)$ y Ω es un dominio G -invariante se cumple lo siguiente:

(a) Si $u \in L^p(\Omega)$ y $g \in G$, entonces $gu \in L^p(\Omega)$ y $|gu|_p = |u|_p$.

(b) Si $u \in H_0^1(\Omega)$ y $g \in G$, entonces $gu \in H_0^1(\Omega)$,

$$\nabla(gu)(x) = g\nabla u(g^{-1}x) \quad \forall x \in \Omega,$$

$$\text{y} \quad \|gu\|_1 = \|u\|_1.$$

Demostración: (a) Como $g(\Omega) = \Omega$ y $|\det g| = 1$, usando el teorema de cambio de variable se tiene que

$$|gu|_p^p = \int_{\Omega} |gu|^p = \int_{\Omega} |u(g^{-1}x)|^p dx = \int_{\Omega} |u(y)|^p dy = |u|_p^p.$$

(b) Sean $g \in G$, $x \in \Omega$. Si $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ la regla de la cadena asegura que

$$\nabla(g\varphi)(x) \cdot y = (g\varphi)'(x)y = \varphi'(g^{-1}x) [g^{-1}y] = \nabla\varphi(g^{-1}x) \cdot g^{-1}y \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Como g es una isometría, $\nabla\varphi(g^{-1}x) \cdot g^{-1}y = g\nabla\varphi(g^{-1}x) \cdot y$. En consecuencia,

$$\nabla(g\varphi)(x) \cdot y = g\nabla\varphi(g^{-1}x) \cdot y \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Esto prueba que $\nabla(g\varphi)(x) = g\nabla\varphi(g^{-1}x)$. Escribiendo a g en forma matricial como $g = (g_{ij})$ esta identidad se escribe como

$$\frac{\partial(g\varphi)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^N g_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial y_j}(g^{-1}x) = \sum_{j=1}^N g_{ij} \left(g \frac{\partial\varphi}{\partial y_j} \right)(x), \quad i = 1, \dots, N.$$

Si $u \in H_0^1(\Omega)$ tomamos una sucesión $\varphi_k \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_k \rightarrow u$ en $H_0^1(\Omega)$. Por tanto, $\varphi_k \rightarrow u$ y $\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_j} \rightarrow D_j u$ en $L^2(\Omega)$. La afirmación (a) asegura entonces que

$$g\varphi_k \rightarrow gu \quad \text{y} \quad g \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_j} \rightarrow g D_j u \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

Por tanto,

$$\frac{\partial(g\varphi_k)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^N g_{ij} \left(g \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_j} \right) \rightarrow \sum_{j=1}^N g_{ij} (g D_j u) \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

En consecuencia, $gu \in H_0^1(\Omega)$ y $D_i(gu) = \sum_{j=1}^N g_{ij} (g D_j u)$ (ver [14, Lema 16.11]), es decir,

$$\nabla(gu)(x) = g\nabla u(g^{-1}x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Finalmente, Como $g(\Omega) = \Omega$ y $|\det g| = 1$, el teorema de cambio de variable asegura que

$$\|gu\|_1^2 = \int_{\Omega} |\nabla(gu)|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u(g^{-1}x)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u(y)|^2 dy = \|u\|_1^2.$$

Esto concluye la demostración. ■

6.1.3. Simetrías y compacidad

Consideraremos subgrupos G de $O(N)$ con la siguiente propiedad:

- (*) Para cada $x \in \mathbb{R}^N$ con $|x| = 1$ existe un subespacio vectorial W_x de $\mathbb{R}^N$ de dimensión 2 tal que

$$S_1 W_x := \{z \in W_x : |z| = 1\} \subset Gx.$$

Nota que, si G satisface (*), necesariamente $\#Gx = \infty$ para toda $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. $O(N)$ y el grupo $\mathbb{S}^1$ del Ejemplo 6.10 tienen la propiedad (*). El grupo $O(m) \times O(n)$ del Ejemplo 6.8 la tiene si y sólo si $m, n \geq 2$.

Si G es un subgrupo de $O(N)$ y Ω es un dominio G -invariante definimos

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega)^G : &= \{u \in H_0^1(\Omega) : gu = u \quad \forall g \in G\} \\ &= \{u \in H_0^1(\Omega) : u(gx) = u(x) \quad \forall g \in G, \forall x \in \Omega\}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

el subespacio de las funciones G -invariantes en $H_0^1(\Omega)$.

Ejercicio 6.14 *Prueba que $H_0^1(\Omega)^G$ es un subespacio vectorial cerrado de $H_0^1(\Omega)$. En consecuencia, $H_0^1(\Omega)^G$ es un espacio de Hilbert.*

Probaremos el siguiente resultado.

Teorema 6.15 *Si G es un subgrupo de $O(N)$ que satisface (*) entonces, para cualquier dominio exterior G -invariante Ω y cualquier $p \in (2, 2^*)$, la inclusión*

$$H_0^1(\Omega)^G \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

es un operador compacto.

Para la demostración de este resultado requerimos el siguiente lema de P.-L. Lions [37].

Lema 6.16 (P.-L. Lions 1984) *Sea (u_n) una sucesión acotada en $H^1(\mathbb{R}^N)$. Supongamos que existen $r > 0$ y $q \in [2, 2^*)$ tales que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{B_r(x)} |u_n|^q \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Entonces $u_n \rightarrow 0$ fuertemente en $L^p(\mathbb{R}^N)$ para toda $p \in (2, 2^)$.*

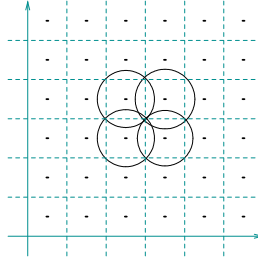
Demostración: Dada $s \in (q, 2^*)$ denotamos por $\alpha \in (0, 1)$ al número que cumple $\frac{1}{s} = \frac{(1-\alpha)}{q} + \frac{\alpha}{2^*}$. Escogemos $s \in (q, 2^*)$ de modo que $\alpha s = 2$. Si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, usando la desigualdad de interpolación (2.2) y la de Sobolev [11, Corolario IX.14] obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_r(x)} |u|^s \right)^{\frac{1}{s}} &\leq \left(\int_{B_r(x)} |u|^q \right)^{\frac{(1-\alpha)}{q}} \left(\int_{B_r(x)} |u|^{2^*} \right)^{\frac{\alpha}{2^*}} \\ &\leq C_0 \left(\int_{B_r(x)} |u|^q \right)^{\frac{(1-\alpha)}{q}} \left(\int_{B_r(x)} |\nabla u|^2 + u^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}}, \end{aligned}$$

donde $B_r(x) := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq r\}$ y C_0 es una constante que depende sólo de N y r . Por tanto,

$$\int_{B_r(x)} |u|^s \leq C_0^s \left(\int_{B_r(x)} |u|^q \right)^{\frac{s(1-\alpha)}{q}} \left(\int_{B_r(x)} |\nabla u|^2 + u^2 \right).$$

Sea $\{\xi_k\}$ un conjunto numerable de puntos de $\mathbb{R}^N$ tal que $\mathbb{R}^N = \cup_{k=1}^{\infty} B_r(\xi_k)$ y tal que cada punto de $\mathbb{R}^N$ está en a lo más 2^N bolas de radio r con centro en algún ξ_k . Por ejemplo, podemos subdividir a $\mathbb{R}^N$ en cubos de lado $2r/\sqrt{N}$ y tomar como $\{\xi_k\}$ al conjunto de los centros de tales cubos:



De la desigualdad anterior se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^s &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_r(\xi_k)} |u|^s \\ &\leq C_0^s \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left(\int_{B_r(x)} |u|^q \right)^{\frac{s(1-\alpha)}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_r(\xi_k)} (|\nabla u|^2 + u^2) \\ &\leq 2^N C_0^s \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left(\int_{B_r(x)} |u|^q \right)^{\frac{s(1-\alpha)}{q}} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2). \end{aligned}$$

Dado que la sucesión (u_n) está acotada en $H^1(\mathbb{R}^N)$, aplicando esta desigualdad a u_n concluimos que existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$|u_n|_s^s \leq C_1 \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left(\int_{B_r(x)} |u_n|^q \right)^{\frac{s(1-\alpha)}{q}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Es decir, $u_n \rightarrow 0$ en $L^s(\mathbb{R}^N)$.

Si $p \in (s, 2^*)$ tomamos $\beta \in (0, 1)$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{1-\beta}{s} + \frac{\beta}{2^*}$. Usando la desigualdad de interpolación (2.2), la de Sobolev (3.1), y el hecho de que (u_n) está acotada en $H^1(\mathbb{R}^N)$, concluimos que

$$|u_n|_p \leq |u_n|_s^{1-\beta} |u_n|_{2^*}^\beta \leq C_0 |u_n|_s^{1-\beta} \|u_n\|_1^\beta \leq C_2 |u_n|_s^{1-\beta} \rightarrow 0.$$

Si $p \in (2, s)$ tomamos $\gamma \in (0, 1)$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{1-\gamma}{2} + \frac{\gamma}{s}$. Se tiene entonces que

$$|u_n|^p \leq |u_n|_2^{1-\gamma} |u_n|_s^\gamma \leq \|u_n\|_1^{1-\gamma} |u_n|_s^\gamma \leq C_3 |u_n|_s^\gamma \rightarrow 0.$$

En conclusión, $u_n \rightarrow 0$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$ para toda $p \in (2, 2^*)$. ■

Demostración del Teorema 6.15. Consideramos a $H_0^1(\Omega)$ como un subespacio de $H^1(\mathbb{R}^N)$ extendiendo a $v \in H_0^1(\Omega)$ por 0 fuera de Ω . Sea (u_n) una sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)^G$. Entonces una subsucesión, a la que denotamos del mismo modo, converge débilmente a u en $H_0^1(\Omega)^G$. Definimos $v_n := u_n - u$. Para una subsucesión de (v_n) se cumple entonces que

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup 0 \quad \text{débilmente en } H^1(\mathbb{R}^N), \\ v_n(x) &\rightarrow 0 \quad \text{c.d. en } \mathbb{R}^N, \\ v_n &\rightarrow 0 \quad \text{en } L_{loc}^2(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Demostraremos que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(x)} |v_n|^2 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (6.7)$$

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $C > 0$ tal que

$$\|v_n\|_1^2 \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Escogemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $C < \varepsilon m$. Denotamos por d_m a la distancia de $e^{2\pi i/m}$ a 1 en $\mathbb{C}$, y tomamos $R_m \geq \max\{2/d_m, 1\}$ tal que $\mathbb{R}^N \setminus \Omega \subset B_{R_m-1}(0)$. Consideramos dos casos:

Caso 1: $|x| \geq R_m$.

Como G satisface $(*)$ existe un subespacio vectorial W_x de $\mathbb{R}^N$ de dimensión 2 tal que el círculo unitario $S_1 W_x := \{z \in W_x : |z| = |x|\}$ está contenido en la G -órbita de $\frac{x}{|x|}$. Podemos entonces escoger $g_1, \dots, g_m \in G$ tales que

$$g_i \frac{x}{|x|} \in S_1 W_x \quad \text{y} \quad \left| g_i \frac{x}{|x|} - g_j \frac{x}{|x|} \right| \geq d_m \quad \forall i \neq j.$$

Dado que $|x| \geq R_m$, concluimos que

$$|g_i x - g_j x| \geq |x| d_m \geq 2 \quad \forall i \neq j.$$

En consecuencia, $B_1(g_i x) \cap B_1(g_j x) = \emptyset$ si $i \neq j$. Ahora bien, como v_n es G -invariante, se tiene que

$$\int_{B_1(g_i x)} v_n^2 = \int_{B_1(x)} v_n^2 \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia,

$$m \int_{B_1(x)} v_n^2 = \int_{\cup_{i=1}^m B_1(g_i x)} v_n^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 \leq \|v_n\|_1^2 \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

lo cual implica que

$$\int_{B_1(x)} v_n^2 < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6.8)$$

Caso 2: $|x| \leq R_m$.

Como $v_n \rightarrow 0$ en $L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ se tiene que $v_n \rightarrow 0$ fuertemente en $L^2(B_{R_m+1}(0))$. Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B_1(x)} v_n^2 \leq \int_{B_{R_m+1}(0)} v_n^2 < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0. \quad (6.9)$$

De las desigualdades (6.8) y (6.9) se sigue que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(x)} v_n^2 \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

lo que demuestra la afirmación (6.7). Aplicando el Lema 6.16 concluimos que $v_n \rightarrow 0$ fuertemente en $L^p(\Omega)$ para todo $p \in (2, 2^*)$.

Ejercicio 6.17 *Prueba que, si $\#G(x) < \infty$ para algún $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, la inclusión $H_0^1(\Omega)^G \hookrightarrow L^p(\Omega)$ no es un operador compacto, para ningún dominio exterior G -invariante Ω de $\mathbb{R}^N$. ■*

El Teorema 6.15 abre la posibilidad de usar los métodos empleados en los capítulos anteriores para obtener soluciones al problema (6.1). Podemos aplicar dichos métodos para obtener puntos críticos de la restricción del funcional J al espacio $H_0^1(\Omega)^G$. Sin embargo, no es cierto en general que los puntos críticos de la restricción de un funcional a un subespacio sean puntos críticos del funcional en todo el espacio, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejercicio 6.18 Considera la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = e^x + y^2$. Prueba que f no tiene puntos críticos y que su restricción al subespacio $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ sí tiene un punto crítico.

A continuación veremos que los puntos críticos de la restricción de J al espacio $H_0^1(\Omega)^G$ sí son puntos críticos de J en $H_0^1(\Omega)$ y, por tanto, son soluciones de (6.1).

6.1.4. El principio de criticalidad simétrica

Si H es un espacio de Hilbert, denotamos por

$$\mathcal{I}(H) := \{T \in \mathcal{B}(H, H) : T \text{ es biyectiva y } \|Tu\| = \|u\| \ \forall u \in H\}$$

al conjunto de isometrías lineales de H . Este es un grupo bajo la composición. Nota que $\mathcal{I}(\mathbb{R}^N) = O(N)$.

Ejercicio 6.19 Prueba que, si $T \in \mathcal{I}(H)$, entonces

$$\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in H. \quad (6.10)$$

(Sugerencia: Prueba que el producto escalar satisface $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$ para todos $u, v \in H$).

Definición 6.20 Sea G un grupo. Una **acción** (isométrica) de G en H es un homomorfismo de grupos $G \rightarrow \mathcal{I}(H)$. A la imagen de $g \in G$ bajo tal homomorfismo se le suele llamar también $g : H \rightarrow H$ y se escribe gu en vez de $g(u)$ para denotar a la imagen de un elemento $u \in H$ bajo la isometría g .

Un espacio de Hilbert con una acción de G se llama un **G -espacio de Hilbert**. El **espacio de G -puntos fijos de H** es el subespacio

$$H^G := \{u \in H : gu = u \ \forall g \in G\}.$$

Un funcional $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ se llama **G -invariante** si

$$J(gu) = J(u) \quad \forall g \in G, \ \forall u \in H.$$

Ejercicio 6.21 Prueba que H^G es un subespacio vectorial cerrado de H y, por tanto, es un espacio de Hilbert.

Ejemplo 6.22 Si G es un subgrupo de $O(N)$ y Ω es G -invariante, la Proposición 6.13 asegura que $H_0^1(\Omega)$ con la acción $g : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ dada por $gu := u \circ g^{-1}$ es un G -espacio de Hilbert, y que el funcional $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|_1^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p$$

es G -invariante. El espacio de G -puntos fijos de $H_0^1(\Omega)$ es el subespacio $H_0^1(\Omega)^G$ de las funciones G -invariantes en $H_0^1(\Omega)$ definido en (6.6).

El siguiente resultado debido a R.S. Palais [43] juega un papel muy importante en problemas variacionales con simetrías.

Teorema 6.23 (Principio de criticalidad simétrica, Palais 1979) *Si H es un G -espacio de Hilbert y $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional G -invariante de clase C^1 , entonces*

(a) $\nabla J : H \rightarrow H$ es G -equivariante, es decir,

$$\nabla J(gu) = g\nabla J(u) \quad \forall u \in H, \forall g \in G.$$

En consecuencia, si $u \in H^G$ entonces $\nabla J(u) \in H^G$.

(b) Si $u \in H^G$ es un punto crítico de la restricción $J|_{H^G} : H^G \rightarrow \mathbb{R}$ entonces u es un punto crítico de J .

Demostración: (a) Como J es G -invariante, $J \circ g = J$ para toda $g \in G$. Sean $u \in H$, $g \in G$. Aplicando la regla de la cadena y la identidad (6.10) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla J(u), v \rangle &= \langle \nabla (J \circ g)(u), v \rangle = (J \circ g)'(u)v \\ &= J'(gu)[gv] = \langle \nabla J(gu), gv \rangle = \langle g^{-1}\nabla J(gu), v \rangle \quad \forall v \in H. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\nabla J(gu) = g\nabla J(u) \quad \forall u \in H, \forall g \in G.$$

En particular, si $u \in H^G$ entonces $gu = u$ y, por tanto,

$$\nabla J(u) = g\nabla J(u) \quad \forall g \in G.$$

Es decir, $\nabla J(u) \in H^G$ para toda $u \in H^G$.

(b) La última afirmación asegura que, si $u \in H^G$ entonces $\nabla(J|_{H^G})(u) = \nabla J(u)$, lo que demuestra (b). ■

En particular, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 6.24 *Si G es un subgrupo de $O(N)$ y Ω es G -invariante, las soluciones G -invariantes del problema (6.1) son precisamente los puntos críticos de la restricción*

$$J|_{H_0^1(\Omega)^G} : H_0^1(\Omega)^G \rightarrow \mathbb{R}$$

del funcional definido en (6.2) al espacio de G -puntos fijos $H_0^1(\Omega)^G$.

Ejercicio 6.25 *Prueba que, si G es un subgrupo de $O(N)$ y Ω es un dominio exterior G -invariante, el espacio $H_0^1(\Omega)^G$ es de dimensión infinita. (Sugerencia: Toma una sucesión de funciones radiales $\varphi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\text{sop}(\varphi_k) \subset \Omega$ tales que $\text{sop}(\varphi_i) \cap \text{sop}(\varphi_j) = \emptyset$ si $i \neq j$, y prueba que φ_i y φ_j son ortogonales en $H_0^1(\Omega)^G$.)*

Teorema 6.26 *Si G es un subgrupo de $O(N)$ que satisface la propiedad (*), Ω es un dominio exterior G -invariante y $p \in (2, 2^*)$, entonces el problema (6.1) tiene una sucesión (u_k) de soluciones G -invariantes tales que*

$$\|u_k\|_1 \rightarrow \infty.$$

Demostración: Por el Corolario 6.24, basta probar que el funcional $J : H_0^1(\Omega)^G \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|_1^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p$$

tiene una infinidad de puntos críticos. Argumentando como en la sección 4.2, se tiene que los puntos críticos no triviales de este funcional son los puntos críticos de la restricción de J a la variedad de Nehari

$$\mathcal{N}^G := \{u \in H_0^1(\Omega)^G : u \neq 0, J'(u)u = 0\} = \mathcal{N} \cap H_0^1(\Omega)^G,$$

que es una variedad de clase $\mathcal{C}^2$. Un argumento idéntico al que se usó para probar la Proposición 5.43, pero aplicando ahora el Teorema 6.15 en vez del Teorema 3.23, nos permite concluir que J satisface la condición de Palais-Smale sobre $\mathcal{N}^G$. Así pues, J satisface las hipótesis del Teorema 5.35 en $\mathcal{N}^G$.

El espacio $H_0^1(\Omega)^G$ es de dimensión infinita (Ejercicio 6.25), así que podemos argumentar como en la demostración del Teorema 5.44 y usar el Corolario 5.40 para probar que $\text{gen}(\mathcal{N}^G) = \infty$. El Teorema 5.35 asegura entonces que el conjunto de valores críticos de J sobre $\mathcal{N}^G$ no está acotado. Por tanto, existe una sucesión de puntos críticos $u_k \in \mathcal{N}^G$ tal que $J(u_k) = \frac{p-2}{2p} \|u_k\|_1^2 \rightarrow \infty$. ■

El siguiente caso particular importante del teorema anterior fue probado por Strauss en ???.

Corolario 6.27 (Strauss 1977) *Si $p \in (2, 2^*)$, el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{p-2} u, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

tiene una infinidad de soluciones radiales.

Veremos a continuación que, en ciertos casos, este problema también tiene una infinidad de soluciones no radiales.

6.1.5. Infinidad de soluciones no radiales

Sean G un subgrupo de $O(N)$ y $\tau : G \rightarrow \mathbb{Z}/2 := \{1, -1\}$ un homomorfismo de grupos. Si Ω es G -invariante podemos definir una acción de G en $H_0^1(\Omega)$, a la que denotaremos $g \cdot_\tau u : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, del siguiente modo: $g \cdot_\tau u := \tau(g)gu$, es decir,

$$(g \cdot_\tau u)(x) := \tau(g)u(g^{-1}(x)) \quad \forall x \in \Omega, \forall g \in G.$$

La Proposición 6.13 nos permite concluir que $g \cdot_\tau u \in H_0^1(\Omega)$, y

$$\begin{aligned} \|g \cdot_\tau u\|_1 &= |\tau(g)| \|gu\|_1 = \|gu\|_1 = \|u\|_1, \\ |g \cdot_\tau u|_p &= |\tau(g)| |gu|_p = |gu|_p = |u|_p. \end{aligned}$$

Ésta es una acción de G en $H_0^1(\Omega)$ y J es G -invariante respecto a esta nueva acción.

Si τ es el homomorfismo trivial $\tau \equiv 1$, esta acción coincide con la que consideramos anteriormente en (6.5). Pero si τ es un epimorfismo (es decir, si es suprayectivo), la acción es distinta. Denotemos por

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega)^\tau &:= \{u \in H_0^1(\Omega) : g \cdot_\tau u = u \quad \forall g \in G\} \\ &= \{u \in H_0^1(\Omega) : u(gx) = \tau(g)u(x) \quad \forall g \in G, \forall x \in \Omega\} \end{aligned}$$

al espacio de puntos fijos bajo esta acción. Nota que, si $u \in H_0^1(\Omega)^\tau$ y $K := \ker \tau$, entonces u es K -invariante, es decir,

$$H_0^1(\Omega)^\tau \subset H_0^1(\Omega)^K.$$

Por otra parte, $u(gx) = -u(x)$ si $\tau(g) = -1$. Así pues, si τ es un epimorfismo, $u \in H_0^1(\Omega)^\tau$ y $u(x) \neq 0$, entonces u cambia de signo sobre la G -órbita de x . En particular, u no es G -invariante.

Ejercicio 6.28 Si $m \in \mathbb{N}$ y $2m \leq N$ consideramos el subgrupo G de $O(N)$ generado por $K := O(m) \times O(m) \times O(N - 2m)$ y por la reflexión $\rho \in O(N)$ dada por

$$\rho(x, y, z) := (y, x, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-2m} \equiv \mathbb{R}^N.$$

Consideramos el homomorfismo $\tau : G \rightarrow \mathbb{Z}/2$ cuyo valor en los generadores está dado por

$$\tau(g) := \begin{cases} 1 & \text{si } g \in O(m) \times O(m) \times O(N - 2m), \\ -1 & \text{si } g = \rho. \end{cases}$$

- (a) Prueba que τ está bien definido y que $\ker \tau = K$.
- (b) Prueba que el espacio $H^1(\mathbb{R}^N)^\tau$ tiene dimensión infinita.

Usando esta acción probaremos el siguiente resultado de Bartsch y Willem [8].

Teorema 6.29 (Bartsch-Willem 1993) *Si $N = 4$ o $N \geq 6$ y $p \in (2, 2^*)$, el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{p-2} u, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (6.11)$$

tiene una infinidad de soluciones no radiales.

Demostración: Para $m = 2$ consideramos el homomorfismo τ del Ejercicio 6.28. Entonces $H^1(\mathbb{R}^N)^\tau \subset H^1(\mathbb{R}^N)^K$ donde $K := O(2) \times O(2) \times O(N-4)$. Si $N = 4$ o $N \geq 6$ entonces K satisface $(*)$ y el Teorema 6.15 asegura que la inclusión $H^1(\mathbb{R}^N)^K \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ es un operador compacto. En consecuencia,

$$H^1(\mathbb{R}^N)^\tau \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$$

es un operador compacto.

Aplicando el principio de criticalidad simétrica (Teorema 6.23) se tiene que las soluciones del problema (6.11) que pertenecen a $H_0^1(\Omega)^\tau$ son precisamente los puntos críticos de la restricción

$$J|_{H^1(\mathbb{R}^N)^\tau}: H^1(\mathbb{R}^N)^\tau \rightarrow \mathbb{R}$$

del funcional definido en (6.2) al espacio $H^1(\mathbb{R}^N)^\tau$. Nota que los elementos de $H^1(\mathbb{R}^N)^\tau$ no son funciones radiales ya que

$$u(x, y, z) = -u(y, x, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{N-4} \equiv \mathbb{R}^N.$$

Ahora podemos argumentar como en la demostración del Teorema 6.26 y usar el Ejercicio 6.28 para concluir que el conjunto de valores críticos de J sobre la variedad de Nehari

$$\mathcal{N}^\tau := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)^\tau : u \neq 0, J'(u)u = 0\} = \mathcal{N} \cap H^1(\mathbb{R}^N)^\tau$$

no está acotado. En consecuencia, el problema (6.11) tiene una infinidad de soluciones no radiales. ■

La existencia de soluciones no radiales del problema (6.11) en dimensiones $N = 5$ y $N = 3$ fue demostrada recientemente por Lorca y Ubilla en [38] y por Musso, Pacard y Wei en [40], respectivamente, usando métodos totalmente diferentes.

6.2. El estado fundamental en $\mathbb{R}^N$

Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{p-2} u \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (6.12)$$

donde $N \geq 3$, $p \in (2, 2^*)$. Las soluciones no triviales de este problema son los puntos críticos de la restricción del funcional

$$J : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(u) = \frac{1}{2} \|u\|_1^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p,$$

a la variedad de Nehari

$$\mathcal{N} := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : u \neq 0, \|u\|_1^2 = |u|_p^p\}.$$

Definición 6.30 $\omega \in H^1(\mathbb{R}^N)$ es un **estado fundamental** del problema (6.12) si satisface

$$J(\omega) = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u).$$

6.2.1. Existencia de un estado fundamental

Nuestro objetivo es probar que el problema (6.12) tiene un estado fundamental.

Como la inclusión $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ es continua para $p \in [2, 2^*]$ (Teorema ??), existe una constante $C > 0$ tal que $|u|_p \leq C \|u\|_1$ para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. La constante más pequeña para la cual esta desigualdad se satisface es $S_p^{-1/2}$, donde

$$S_p := \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|_1^2}{|u|_p^2} > 0. \quad (6.13)$$

A S_p se le suele llamar **la mejor constante de Sobolev** para el encaje de $H^1(\mathbb{R}^N)$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Lema 6.31 *Se cumple que*

$$\inf_{\mathcal{N}} J = \frac{p-2}{2p} S_p^{\frac{p}{p-2}}.$$

Demostración: Observa que

$$\mathcal{N} = \left\{ \left[\frac{\|u\|_1^2}{|u|_p^p} \right]^{\frac{1}{p-2}} u : u \in H^1(\mathbb{R}^N), u \neq 0 \right\}.$$

Recuerda que $J(v) = \frac{p-2}{2p} \|v\|_1^2$ para todo $v \in \mathcal{N}$. De modo que

$$\inf_{\mathcal{N}} J = \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} J \left(\left[\frac{\|u\|_1^2}{|u|_p^p} \right]^{\frac{1}{p-2}} u \right) = \frac{p-2}{2p} \left(\inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|_1^2}{|u|_p^p} \right)^{\frac{p}{p-2}} = \frac{p-2}{2p} S_p^{\frac{p}{p-2}},$$

como afirma el enunciado. ■

Lema 6.32 Sea H un espacio de Hilbert y sea (u_n) una sucesión en H tal que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en H . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|^2 - \|u_n - u\|^2) = \|u\|^2.$$

Demostración: Como $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en H ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|^2 - \|u_n - u\|^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2 \langle u_n, u \rangle - \|u\|^2) \\ &= 2 \|u\|^2 - \|u\|^2 = \|u\|^2, \end{aligned}$$

como afirma el lema. ■

A continuación probaremos que, bajo condiciones adecuadas, la función $|\cdot|_p^p$ satisface una igualdad análoga. Requerimos el siguiente lema.

Lema 6.33 Sea $p \in [1, \infty)$. Dada $\varepsilon > 0$ existe $C = C(\varepsilon, p) > 0$ tal que

$$||a + b|^p - |a|^p| \leq \varepsilon |a|^p + C |b|^p \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Demostración: Si $b = 0$ la desigualdad se satisface para cualquier $C > 0$. Podemos entonces suponer que $b \neq 0$. Basta entonces probar que

$$||t + 1|^p - |t|^p| - \varepsilon |t|^p \leq C \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ya que, tomando $t = \frac{a}{b}$, obtenemos de ésta la desigualdad deseada.

Por el teorema del valor medio, existe un número r entre t y $t + 1$ tal que

$$||t + 1|^p - |t|^p| = p |r|^{p-1} \leq p(|t| + 1)^{p-1}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $p(s + 1)^{p-1} - \varepsilon s^p \rightarrow -\infty$ cuando $s \rightarrow \infty$, existe $C > 0$ tal que $p(s + 1)^{p-1} - \varepsilon s^p < C$ para todo $s \in [0, \infty)$. En consecuencia,

$$||t + 1|^p - |t|^p| - \varepsilon |t|^p \leq p(|t| + 1)^{p-1} - \varepsilon |t|^p \leq C,$$

como afirma el lema. ■

Lema 6.34 (Brezis-Lieb, 1983) Sean $1 \leq p < \infty$ y (u_n) una sucesión acotada en $L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n(x) \rightarrow u(x)$ para casi toda $x \in \mathbb{R}^N$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p) = |u|_p^p.$$

Demostración: Como $(|u_n|_p^p)$ es una sucesión acotada en $L^1(\mathbb{R}^N)$ el lema de Fatou asegura que $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Sea $\varepsilon > 0$. Definimos

$$v_n := ||u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p - |u|_p^p| - \varepsilon |u_n - u|_p^p.$$

Sea $C = C(\varepsilon, p)$ como en el Lema 6.33. Aplicando dicho lema a $a := u_n(x) - u(x)$ y $b := u(x)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} v_n(x) &\leq ||u_n(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p| - \varepsilon |u_n(x) - u(x)|^p + |u(x)|^p \\ &\leq (C + 1)|u(x)|^p \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

En consecuencia, $v_n^+ := \max\{v_n, 0\}$ cumple que $|v_n^+(x)| \leq (C + 1)|u(x)|^p$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Aplicando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} v_n^+ = 0.$$

Ahora bien, como (u_n) está acotada en $L^p(\mathbb{R}^N)$ existe $C' > 0$, independiente de ε , tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} ||u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p - |u|_p^p| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|_p^p + \int_{\mathbb{R}^N} v_n^+ \leq C'\varepsilon + \int_{\mathbb{R}^N} v_n^+.$$

Haciendo tender $n \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} ||u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p - |u|_p^p| \leq C'\varepsilon \quad \text{para toda } \varepsilon > 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p - |u|_p^p) = 0,$$

como afirma el enunciado. ■

También usaremos el siguiente resultado que dejamos como ejercicio.

Ejercicio 6.35 Prueba que, si $\alpha < 1$, entonces

$$a^\alpha + b^\alpha \geq (a + b)^\alpha \quad \forall a, b > 0.$$

Prueba que la igualdad $a^\alpha + b^\alpha = (a + b)^\alpha$ se cumple si y sólo si $ab = 0$.

Dados $y \in \mathbb{R}^N$ y $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ denotaremos por $T_y u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ a la función

$$T_y u(x) := u(x - y).$$

$T_y u$ se llama la **traslación de u por y** . Nota que $\|T_y u\|_1 = \|u\|_1$ y $|T_y u|_p = |u|_p$. En consecuencia $J(T_y u) = J(u)$, y $T_y u \in \mathcal{N}$ si $u \in \mathcal{N}$.

Lions [?] demostró que el problema (6.12) tiene un estado fundamental.

Teorema 6.36 (P.L. Lions, 1984) Sean $p \in (2, 2^*)$ y (u_n) una sucesión en $\mathcal{N}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \inf_{\mathcal{N}} J.$$

Entonces, para una subsucesión, existe una sucesión (x_n) en $\mathbb{R}^N$ tal que $(T_{x_n} u_n)$ converge fuertemente en $H^1(\mathbb{R}^N)$. En consecuencia, el problema (6.12) tiene un estado fundamental.

Demostración: Por el Lema 6.31 se tiene que

$$\frac{2p}{p-2} J(u_n) = \|u_n\|_1^2 = |u_n|_p^p \longrightarrow S_p^{\frac{p}{p-2}} > 0.$$

De modo que ninguna subsucesión de (u_n) converge a 0 fuertemente en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Como $p \in (2, 2^*)$, el Lema 6.16 implica que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(x)} |u_n|^2 \geq \delta > 0.$$

Escojamos $x_n \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(x_n)} |u_n|^2 \geq \delta/2,$$

y sea $w_n := T_{x_n} u_n$. Entonces $w_n \in \mathcal{N}$ y $J(w_n) = J(u_n)$. Por tanto,

$$\|w_n\|_1^2 = |w_n|_p^p = \frac{2p}{p-2} J(w_n) \longrightarrow S_p^{\frac{p}{p-2}}.$$

El Corolario 3.25 asegura que (w_n) contiene una subsucesión tal que

$$\begin{aligned} w_n &\rightharpoonup w \text{ débilmente en } H^1(\mathbb{R}^N), \\ w_n(x) &\rightarrow w(x) \text{ casi dondequiera en } \mathbb{R}^N, \\ w_n &\rightarrow w \text{ fuertemente en } L_{loc}^2(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\delta/2 \leq \int_{B_1(x_n)} u_n^2 = \int_{B_1(0)} w_n^2 \rightarrow \int_{B_1(0)} w^2$$

y, por tanto, $w \neq 0$. Además, de los Lemas 6.32 y 6.34, y la definición (6.13) de S_p se sigue que

$$\begin{aligned}
S_p^{\frac{p}{p-2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_1^2 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w\|_1^2 + \|w\|_1^2 \\
&\geq S_p \left[\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n - w|_p^2 + |w|_p^2 \right] \\
&= S_p \left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n - w|_p^p \right)^{2/p} + \left(|w|_p^p \right)^{2/p} \right] \\
&\geq S_p \left[\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n - w|_p^p + |w|_p^p \right]^{2/p} \\
&= S_p \left[\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n|_p^p \right]^{2/p} \\
&= S_p^{\frac{p}{p-2}}.
\end{aligned}$$

La segunda desigualdad se deriva del Ejercicio 6.35. Más aún, como se satisface la igualdad

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n - w|_p^p \right)^{2/p} + \left(|w|_p^p \right)^{2/p} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n - w|_p^p + |w|_p^p \right]^{2/p}$$

y $w \neq 0$, forzosamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n - w|_p^p = 0.$$

En consecuencia,

$$S_p^{\frac{p}{p-2}} = S_p |w|_p^2 \leq \|w\|_1^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|_1^2 = S_p^{\frac{p}{p-2}},$$

es decir, $\|w_n\|_1 \rightarrow \|w\|_1$ y, como $w_n \rightharpoonup w$ débilmente en $H^1(\mathbb{R}^N)$, concluimos que $w_n \rightarrow w$ fuertemente en $H^1(\mathbb{R}^N)$. Por tanto, w es un mínimo de J en $\mathcal{N}$, es decir, un estado fundamental del problema (6.12). ■

Observa que si w es un estado fundamental de (6.12) entonces $T_y w$ también es un estado fundamental de (6.12) para cada $y \in \mathbb{R}^N$.

6.2.2. Simetría del estado fundamental

Nuestro objetivo ahora es probar que todo estado fundamental de (6.12) es radialmente simétrico respecto a algún punto $a \in \mathbb{R}^N$. Usaremos el principio de continuación única, que enunciamos a continuación y cuya demostración se encuentra en [31, 25].

Teorema 6.37 (Principio de continuación única) Sean Ω un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, y $V \in C^0(\Omega)$. Si $u \in H^1(\Omega)$ satisface

$$-\Delta u + V(x)u = 0,$$

y $u = 0$ en un subconjunto abierto no vacío de Ω , entonces $u = 0$ en Ω .

Probaremos primero el siguiente resultado. El método empleado para demostrarlo se conoce como el método del plano móvil y fue introducido por Gidas, Ni y Nirenberg en [26, 27].

Proposición 6.38 Sea $w \in \mathcal{N}$ un estado fundamental de (6.12). Entonces existe $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que w es invariante respecto a la reflexión ρ_1 sobre el plano $x_1 = a_1$, es decir,

$$w(\rho_1 x) = w(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

donde $\rho_1(x_1, \dots, x_N) := (2a_1 - x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Demostración: El Lema 6.31 asegura que

$$\|w\|_1^2 = |w|_p^p = S_p^{\frac{p}{p-2}} > 0.$$

Escogemos $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{x_1 \geq a_1} |w|^p = \frac{1}{2} S_p^{\frac{p}{p-2}} = \int_{x_1 \leq a_1} |w|^p.$$

Podemos suponer sin perder generalidad que

$$\int_{x_1 \geq a_1} (|\nabla w|^2 + w^2) \leq \int_{x_1 \leq a_1} (|\nabla w|^2 + w^2). \quad (6.14)$$

Definimos entonces

$$u(x) := \begin{cases} w(x) & \text{si } x_1 \geq a_1, \\ w(\rho_1 x) & \text{si } x_1 \leq a_1. \end{cases}$$

Esta función cumple que $u(\rho_1 x) = u(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Nuestro objetivo es demostrar que $w = u$.

Notemos primero que

$$|u|_p^p = \int_{x_1 \geq a_1} |w|^p + \int_{x_1 \leq a_1} |w \circ \rho_1|^p = 2 \int_{x_1 \geq a_1} |w|^p = S_p^{\frac{p}{p-2}}.$$

Por tanto,

$$\|u\|_1^2 \geq S_p |u|_p^2 = S_p^{\frac{p}{p-2}} = \|w\|_1^2.$$

Por otra parte, se sigue de (6.14) que

$$\begin{aligned}
\|u\|_1^2 &= \int_{x_1 \geq a_1} (|\nabla w|^2 + w^2) + \int_{x_1 \leq a_1} (|\nabla(w \circ \rho_1)|^2 + (w \circ \rho_1)^2) \\
&= 2 \int_{x_1 \geq a_1} (|\nabla w|^2 + w^2) \\
&\leq \int_{x_1 \geq a_1} (|\nabla w|^2 + w^2) + \int_{x_1 \leq a_1} (|\nabla w|^2 + w^2) = \|w\|_1^2.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\|u\|_1^2 = \|w\|_1^2 = S_p^{\frac{p}{p-2}}$. De modo que $u \in \mathcal{N}$ y u es un estado fundamental de (6.12). Dado que u y w satisfacen

$$\begin{aligned}
-\Delta u + u &= |u|^{p-2} u, \\
-\Delta w + w &= |w|^{p-2} w,
\end{aligned}$$

definiendo $v := u - w$ y restando estas ecuaciones obtenemos que v satisface

$$-\Delta v + v = |u|^{p-2} u - |w|^{p-2} w. \quad (6.15)$$

Notemos ahora que, para cada $u, w \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|u|^{p-2} u - |w|^{p-2} w &= \int_0^1 \frac{d}{dt} |w + t(u - w)|^{p-2} (w + t(u - w)) dt \\
&= (p - 1) \left(\int_0^1 |w + t(u - w)|^{p-2} dt \right) (u - w).
\end{aligned}$$

Si definimos

$$V(x) := 1 - (p - 1) \left(\int_0^1 |w(x) + tv(x)|^{p-2} dt \right)$$

la ecuación (6.15) se transforma en

$$-\Delta v + V(x)v = 0.$$

Ahora bien, como u y w son soluciones de (6.12), u y w son continuas. Por tanto, V es continua. Pero $v(x) = 0$ si $x_1 \geq a_1$, así que el principio de continuación única (Teorema 6.37) nos permite concluir que $v = 0$ en $\mathbb{R}^N$, es decir, que $w = u$. ■

Lema 6.39 *Si $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ cumple que $u(x) = u(-x)$ y $u(x_1, \dots, x_N) = u(2a_1 - x_1, x_2, \dots, x_N)$ para toda $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, entonces $u(x_1, \dots, x_N) = u(x_1 + 4a_1, x_2, \dots, x_N)$ para toda $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. En consecuencia, si $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y $u \neq 0$, entonces $a_1 = 0$.*

Demostración: Se tiene que

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_N) &= u(-x_1, \dots, -x_N) = u(2a_1 + x_1, -x_2, \dots, -x_N) \\ &= u(-2a_1 - x_1, x_2, \dots, x_N) = u(4a_1 + x_1, x_2, \dots, x_N). \end{aligned}$$

Esto implica que u es $4a_1$ -periódica en la variable x_1 . Por tanto,

$$m \int_{|x_1| \leq 2a_1} u^2 < \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Así, si $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y $u \neq 0$, entonces $a_1 = 0$. ■

Teorema 6.40 (Gidas-Ni-Nirenberg, 1981) *Todo estado fundamental del problema (6.12) es radialmente simétrico respecto a algún punto $a \in \mathbb{R}^N$.*

Demostración: Sea $w \in \mathcal{N}$ un estado fundamental de (6.12). Por la proposición anterior existen $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ tales que w es invariante respecto a la reflexión ρ_j sobre el plano $x_j = a_j$ para cada $j = 1, \dots, N$. Sea $a = (a_1, \dots, a_N)$ y sea $\omega(x) = w(x - a)$. Queremos probar que ω es radialmente simétrica respecto a 0. Por lo pronto sabemos que

$$\omega(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) = \omega(x_1, \dots, -x_j, \dots, x_N) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \text{ y } \forall j = 1, \dots, N.$$

En consecuencia, $\omega(x) = \omega(-x)$ para toda $x \in \mathbb{R}^N$. Probaremos a continuación que ω es invariante respecto a la reflexión sobre cualquier plano que pase por el origen.

Sea $z \in \mathbb{R}^N$ tal que $|z| = 1$. Por la Proposición 6.38 existe $a_z \in \mathbb{R}$ tal que ω es invariante respecto a la reflexión sobre el plano $z \cdot (x - a_z z) = 0$. El Lema 6.39 implica entonces que $a_z = 0$. Es decir, ω es invariante respecto a la reflexión sobre cualquier hiperplano que pasa por el origen.

Probemos ahora que ω es radialmente simétrica. Sean $y_1 \neq y_2 \in \mathbb{R}^N$ tales que $|y_1| = |y_2|$. Entonces y_2 es la imagen de y_1 bajo la reflexión sobre el plano $(y_1 - y_2) \cdot x = 0$. En consecuencia, $\omega(y_1) = \omega(y_2)$. ■

6.2.3. No existencia de estados fundamentales en dominios exteriores

Consideremos ahora el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{p-2} u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (6.16)$$

en un dominio exterior Ω en $\mathbb{R}^N$ tal que $\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$ es no vacío. Supondremos como antes que $N \geq 3$ y $p \in (2, 2^*)$. Nuestro objetivo es probar que no existe un estado fundamental para este problema, es decir, que

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|_1^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p$$

no alcanza su mínimo en la variedad de Nehari

$$\mathcal{N}_\Omega := \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0, \|u\|_1^2 = |u|_p^p\}.$$

Dado que $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, se tiene que

$$\inf_{\mathcal{N}_\Omega} J \geq \inf_{\mathcal{N}_{\mathbb{R}^N}} J = \frac{p-2}{2p} S_p^{\frac{p}{p-2}}. \quad (6.17)$$

Probaremos que se cumple la igualdad. Para ello, escojamos una función $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ y $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$. Dados $r > 0$ y $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, definimos

$$\varphi_r(x) := \varphi\left(\frac{x}{r}\right) \quad \text{y} \quad u_r := \varphi_r u. \quad (6.18)$$

Observa que $\varphi_r(x) = 1$ si $|x| \leq r$ y $\varphi_r(x) = 0$ si $|x| \geq 2r$.

Lema 6.41 *Si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ entonces $u_r \rightarrow u$ fuertemente en $H^1(\mathbb{R}^N)$ cuando $r \rightarrow \infty$.*

Demostración: Se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u - u_r|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |1 - \varphi_r|^2 |u|^2 = \int_{|x| \geq r} |1 - \varphi_r|^2 |u|^2 \leq \int_{|x| \geq r} |u|^2.$$

Sea $C > 0$ tal que $|\nabla \varphi(x)| \leq C$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u - u_r)|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |(1 - \varphi_r) \nabla u - u \nabla \varphi_r|^2 \\ &\leq 4 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |(1 - \varphi_r) \nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |u \nabla \varphi_r|^2 \right) \\ &\leq 4 \int_{|x| \geq r} |\nabla u|^2 + \frac{4C}{r^2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2. \end{aligned}$$

En consecuencia, como $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\|u - u_r\|_1^2 \leq 4 \int_{|x| \geq r} |\nabla u|^2 + \frac{4C}{r^2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 + \int_{|x| \geq r} |u|^2 \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty.$$

Esto demuestra la afirmación del lema. ■

Lema 6.42 *Si Ω es un dominio exterior, entonces*

$$\inf_{\mathcal{N}_\Omega} J = \frac{p-2}{2p} S_p^{\frac{p}{p-2}}.$$

Demostración: Sea $R > 0$ tal que $\mathbb{R}^N \setminus \Omega \subset B_R(0)$ y sea ω una solución fundamental de (6.12). Definimos $u_k := T_{\xi_k} \omega_k$, donde $\xi_k := (R + 2k, 0, \dots, 0)$ y $\omega_k := \varphi_k \omega$ con φ_k como en (6.18), es decir,

$$u_k(x) := \varphi_k(x - \xi_k) \omega(x - \xi_k).$$

Entonces $u_k(x) = 0$ si $|x - \xi_k| \geq 2k$. Por tanto, $u_k \in H_0^1(\Omega)$.

Como $u_k \neq 0$ existe $t_k > 0$ tal que $t_k u_k \in \mathcal{N}_\Omega$. Explícitamente, $t_k = \left(\frac{\|u_k\|_1^2}{|u_k|_p^2} \right)^{\frac{1}{p-2}}$. Por tanto,

$$J(t_k u_k) = \frac{p-2}{2p} \left(\frac{\|u_k\|_1^2}{|u_k|_p^2} \right)^{\frac{p}{p-2}} = \frac{p-2}{2p} \left(\frac{\|\omega_k\|_1^2}{|\omega_k|_p^2} \right)^{\frac{p}{p-2}}.$$

Aplicando el lema anterior, tenemos que

$$J(t_k u_k) \rightarrow \frac{p-2}{2p} \left(\frac{\|\omega\|_1^2}{|\omega|_p^2} \right)^{\frac{p}{p-2}} = \frac{p-2}{2p} S_p^{\frac{p}{p-2}}.$$

Esto demuestra que

$$\inf_{\mathcal{N}_\Omega} J \leq \frac{p-2}{2p} S_p^{\frac{p}{p-2}}$$

y de la observación (6.17) se sigue la igualdad. ■

Teorema 6.43 *Si Ω es un dominio exterior en $\mathbb{R}^N$ tal que $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ es no vacío, entonces J no alcanza su mínimo en $\mathcal{N}_\Omega$.*

Demostración: Argumentando por contradicción, supongamos que existe $u \in \mathcal{N}_\Omega$ tal que

$$J(u) = \inf_{\mathcal{N}_\Omega} J = \frac{p-2}{2p} S_p^{\frac{p}{p-2}}.$$

Entonces u es un estado fundamental del problema (6.12), es decir, u es de clase $\mathcal{C}^2$ y satisface

$$-\Delta u + (1 - |u|^{p-2})u = 0.$$

Esto contradice el principio de continuación única, ya que u se anula en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. ■

En 1997 Bahri y Lions [7] probaron que el problema (6.16) tiene una solución positiva en cualquier dominio exterior. El problema de existencia de más de una solución para el problema (6.16) en un dominio exterior arbitrario está abierto.

Esteban y Lions [22] probaron que existen dominios no acotados para los cuales el problema (6.16) tiene únicamente la solución trivial. El semiespacio $\{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$ es uno de tales dominios.

6.3. Problemas no autónomos

Consideremos ahora el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = |u|^{p-2}u \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (6.19)$$

donde $N \geq 3$, $p \in (2, 2^*)$ y $a \in C^0(\mathbb{R}^N)$ satisface $a(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = a_\infty > 0. \quad (6.20)$$

6.3.1. Formulación variacional del problema

Definición 6.44 Una solución de (6.19) es una función $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ que satisface

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)uv = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uv \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ definimos

$$\langle u, v \rangle_a := \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + a(x)uv), \quad \|u\|_a := \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2) \right)^{1/2}.$$

Lema 6.45 (a) $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$ es un producto escalar en $H^1(\mathbb{R}^N)$ y la norma inducida es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$ de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

(b) Existe $C > 0$ tal que

$$|u|_p \leq C \|u\|_a \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Demostración: (a): $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$ es claramente bilineal y simétrico. Nuestras hipótesis sobre a aseguran que existen $0 < a_0 < 1 < a_1 < \infty$ tales que

$$a_0 \leq a(x) \leq a_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

En consecuencia,

$$a_0 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2) \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2) \leq a_1 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2),$$

es decir, $a_0 \|u\|_1^2 \leq \|u\|_a^2 \leq a_1 \|u\|_1^2$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, de lo cual se sigue inmediatamente la afirmación (a).

(b): Usando (6.13) obtenemos

$$|u|_p^2 \leq S_p \|u\|_1^2 \leq a_0 S_p \|u\|_a^2 \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

como se afirma en (b). ■

En consecuencia, el funcional $J_a : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$\begin{aligned} J_a(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2) - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \\ &= \frac{1}{2} \|u\|_a^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p \end{aligned}$$

es de clase $\mathcal{C}^2$ y su derivada está dada por

$$J'_a(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)uv - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uv$$

(Ejercicio 4.5, Teorema 4.8 y Ejercicio 4.9). De modo que las soluciones del problema (6.19) son los puntos críticos de J_a . Los puntos críticos no triviales de J_a están en la variedad de Nehari

$$\mathcal{N}_a = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : u \neq 0, \|u\|_a^2 = |u|_p^p\}.$$

Si denotamos por

$$S_{p,a} := \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|_a^2}{|u|_p^2},$$

el Lema 6.45 asegura que $S_{p,a} > 0$, y como en el Lema 6.31 se demuestra que

$$\inf_{\mathcal{N}_a} J_a = \frac{p-2}{2p} S_{p,a}^{\frac{p}{p-2}}.$$

6.3.2. El Teorema de Lions

El problema

$$\begin{cases} -\Delta u + a_\infty u = |u|^{p-2} u, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (6.21)$$

se llama el *problema límite asociado al problema (6.19)*.

Lema 6.46 *Si $v_k \rightharpoonup 0$ débilmente en $H^1(\mathbb{R}^N)$, entonces una subsucesión cumple que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\|v_k\|_a^2 - \|v_k\|_{a_\infty}^2) = 0.$$

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. La sucesión (v_k) está acotada en $H^1(\mathbb{R}^N)$ y, por el Corolario 3.25, una subsucesión satisface que $v_k \rightarrow 0$ fuertemente en $L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$. Sean $C > 0$ tal que $|v_k|_2^2 < C$ para toda $k \in \mathbb{N}$, y $R > 0$ tal que

$$|a(x) - a_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{2C} \quad \text{si } |x| \geq R.$$

Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{|x| \leq R} |a(x) - a_\infty| v_k^2 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |a(x) - a_\infty| \int_{|x| \leq R} v_k^2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si } k \geq k_0.$$

Además,

$$\int_{|x| \geq R} |a(x) - a_\infty| v_k^2 \leq \frac{\varepsilon}{2C} \int_{|x| \geq R} v_k^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \left| \|v_k\|_a^2 - \|v_k\|_{a_\infty}^2 \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (a(x) - a_\infty) v_k^2 \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |a(x) - a_\infty| v_k^2 < \varepsilon \quad \text{si } k \geq k_0, \end{aligned}$$

como afirma el enunciado del lema. ■

Denotemos por

$$S_{p,\infty} := \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|_{a_\infty}^2}{|u|_p^2}.$$

Proposición 6.47 (a) $S_{p,a} \leq S_{p,\infty}$.

(b) Si

$$S_{p,a} < S_{p,\infty},$$

entonces J_a alcanza su mínimo en $\mathcal{N}_a$.

Demostración: (a): Sea ω_∞ un estado fundamental del problema (6.21)¹ y sea (ξ_k) una sucesión en $\mathbb{R}^N$ tal que $|\xi_k| \rightarrow \infty$. Definimos $v_k(x) := \omega_\infty(x - \xi_k)$. Entonces $v_k \rightharpoonup 0$ débilmente en $H^1(\mathbb{R}^N)$. Observa que $\|v_k\|_{a_\infty} = \|\omega_\infty\|_{a_\infty}$ y $|v_k|_p = |\omega_\infty|_p$. El Lema 6.46 implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|v_k\|_a^2}{|v_k|_p^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|v_k\|_{a_\infty}^2}{|v_k|_p^2} = \frac{\|\omega_\infty\|_{a_\infty}^2}{|\omega_\infty|_p^2} = S_{p,\infty}.$$

En consecuencia, $S_{p,a} \leq S_{p,\infty}$.

(b): Supongamos que $S_{p,a} < S_{p,\infty}$. Sea (u_k) una sucesión en $\mathcal{N}_a$ tal que

$$J_a(u_k) \rightarrow \frac{p-2}{2p} S_{p,a}^{p/(p-2)}.$$

Entonces

$$\|u_k\|_a^2 = |u_k|_p^p \rightarrow S_{p,a}^{p/(p-2)}.$$

Por el Corolario 3.25, una subsucesión satisface

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u \text{ débilmente en } H^1(\mathbb{R}^N), \\ u_k(x) &\rightarrow u(x) \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}^N, \\ u_k &\rightarrow u \text{ fuertemente en } L_{loc}^2(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Si $u = 0$, el Lema 6.46 implicaría que

$$\begin{aligned} S_{p,a}^{\frac{p}{p-2}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_a^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{a_\infty}^2 \geq S_{p,\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} |u_k|_p^2 \\ &> S_{p,a} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} |u_k|_p^p \right)^{2/p} = S_{p,a}^{\frac{p}{p-2}}, \end{aligned}$$

lo que contradice nuestra hipótesis. En consecuencia, $u \neq 0$.

¹Ver ejercicio 1 de la tarea 8.

De los Lemas 6.32 y 6.34, y la definición de $S_{p,a}$ se sigue que

$$\begin{aligned}
 S_{p,a}^{\frac{p}{p-2}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_a^2 \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_a^2 + \|u\|_a^2 \\
 &\geq S_{p,a} \left[\left(\lim_{k \rightarrow \infty} |u_k - u|_p^p \right)^{2/p} + \left(|u|_p^p \right)^{2/p} \right] \\
 &\geq S_{p,a} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} |u_k - u|_p^p + |u|_p^p \right]^{2/p} \\
 &= S_{p,a} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} |u_k|_p^p \right]^{2/p} \\
 &= S_{p,a}^{\frac{p}{p-2}}.
 \end{aligned}$$

Como $u \neq 0$, el Ejercicio 6.35 implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |u_k - u|_p^p = 0.$$

En consecuencia,

$$S_{p,a}^{\frac{p}{p-2}} = S_{p,a} |u|_p^2 \leq \|u\|_a^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_a^2 = S_{p,a}^{\frac{p}{p-2}},$$

es decir, $\|u_k\|_a \rightarrow \|u\|_a$ y, como $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $H^1(\mathbb{R}^N)$, concluimos que $u_k \rightarrow u$ fuertemente en $H^1(\mathbb{R}^N)$. Por tanto, u es un mínimo de J_a en $\mathcal{N}_a$. ■

P.L. Lions [?] demostró que, si a satisface condiciones adecuadas, entonces J_a alcanza su mínimo en $\mathcal{N}_a$.

Teorema 6.48 (P.L. Lions, 1984) *Si $a \in C^0(\mathbb{R}^N)$ satisface que*

$$0 < a(x) \leq \lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = a_\infty > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

entonces el problema (6.19) tiene una solución no trivial de energía mínima.

Demostración: Si $a \equiv a_\infty$ el resultado se sigue del Teorema 6.36 y el ejercicio 1 de la tarea 8 ??.

Supongamos que $a \not\equiv a_\infty$. Sean $x_0 \in \mathbb{R}^N$ y $r > 0$ tales que $a_\infty - a(x) > 0$ si $|x - x_0| \leq r$. Sea ω_∞ un estado fundamental del problema (6.21). Entonces se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (a_\infty - a(x)) \omega_\infty^2 \geq \int_{|x-x_0| \leq r} (a_\infty - a(x)) \omega_\infty^2 > 0.$$

En consecuencia, $\|\omega_\infty\|_{a_\infty}^2 > \|\omega_\infty\|_a^2$ y se tiene que

$$S_{p,a} \leq \frac{\|\omega_\infty\|_a^2}{|\omega_\infty|_p^2} < \frac{\|\omega_\infty\|_{a_\infty}^2}{|\omega_\infty|_p^2} = S_{p,\infty}.$$

El resultado se sigue de la Proposición 6.47. ■

6.4. La ecuación estacionaria de Schrödinger

La ecuación no lineal de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\hbar^2 \Delta \psi + V(x)\psi - |\psi|^{p-2} \psi \quad (6.22)$$

modela el comportamiento de una partícula cargada en un sistema cuántico, donde $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ es el potencial, $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ es la función de onda y $\hbar$ es la constante de Planck. Una solución de la forma $\psi(t, x) = e^{-i\omega t/\hbar} u(x)$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, se llama una *onda estacionaria* de la ecuación de Schrödinger (6.22).

Si ψ es una onda estacionaria entonces se cumple que

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - \hbar^2 \Delta \psi + V(x)\psi - |\psi|^{p-2} \psi = e^{-i\omega t/\hbar} (-\omega u - \hbar^2 \Delta u + V(x)u - |u|^{p-2} u) = 0.$$

Por tanto, las ondas estacionarias de (6.22) corresponden a las soluciones del problema

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + a(x)u = |u|^{p-2} u, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (6.23)$$

donde $\varepsilon := \hbar$ y por $a(x) := V(x) - \omega$. Como la constante de Planck $\hbar$ es muy pequeña, en ciertas situaciones interesa la existencia de soluciones del problema para ε suficientemente pequeña, a las que se les llama *soluciones semiclásicas* de la ecuación de Schrödinger.

Una solución del problema (6.23) es una función $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi + a(x)u\varphi = \int_{\Omega} |u|^{p-2} u\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Como antes supondremos que $a \in C^0(\mathbb{R}^N)$ satisface $a(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = a_\infty > 0.$$

Lema 6.49 $u(x)$ es solución del problema (6.23) si y sólo si $v(x) := u(\varepsilon^{-1}x)$ es solución (débil) del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + a(\varepsilon x)u = |u|^{p-2}u, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Demostración: Se sigue de un cálculo sencillo. ■

Teorema 6.50 Si $a \in C^0(\mathbb{R}^N)$ satiface $a(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y

$$\inf_{\mathbb{R}^N} a < \lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = a_\infty > 0,$$

entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que el problema (6.23) tiene una solución positiva para toda $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Demostración: Denotemos por $a_\varepsilon(x) := a(\varepsilon x)$. Por la Proposición 6.47 basta probar que, para ε suficientemente pequeña, $S_{p, a_\varepsilon} < S_{p, \infty}$. Sea ω_∞ un estado fundamental del problema límite (6.21). Sin perder generalidad podemos suponer que 0 es un mínimo de a . Sean $r > 0$ y $\delta > 0$ tales que $a(x) \leq a_\infty - \delta$ si $|x| \leq r$. Entonces

$$a_\varepsilon(x) \leq a_\infty - \delta \quad \text{si } |x| \leq \frac{r}{\varepsilon}.$$

Escojamos $R > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \omega_\infty^2 < \frac{\delta}{\sup_{\mathbb{R}^N} a} \int_{\mathbb{R}^N} \omega_\infty^2,$$

y definamos $\varepsilon_0 := \frac{r}{R}$. Entonces, para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} a_\varepsilon \omega_\infty^2 &= \int_{B_R(0)} a_\varepsilon \omega_\infty^2 + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} a_\varepsilon \omega_\infty^2 \\ &< (a_\infty - \delta) \int_{\mathbb{R}^N} \omega_\infty^2 + \delta \int_{\mathbb{R}^N} \omega_\infty^2 = \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty \omega_\infty^2. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$S_{p, a_\varepsilon} \leq \frac{\|\omega_\infty\|_{a_\varepsilon}^2}{\|\omega_\infty\|_p^2} < \frac{\|\omega_\infty\|_{a_\infty}^2}{\|\omega_\infty\|_p^2} = S_{p, \infty}$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. ■

Capítulo 7

Problemas elípticos con exponente crítico

El objetivo de este capítulo es estudiar el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2} u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.1)$$

donde Ω es un dominio en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y el exponente del término no lineal es el exponente crítico de Sobolev $2^* := \frac{2N}{N-2}$.

La motivación para estudiar problemas de exponente crítico proviene de la geometría riemanniana, donde problemas importantes como el problema de Yamabe o el problema de la curvatura escalar prescrita se expresan en términos de una ecuación elíptica con exponente crítico; consulta por ejemplo [36].

7.1. Invariancia bajo dilataciones

Consideremos el espacio vectorial

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : u \text{ es débilmente diferenciable y } D_i u \in L^2(\mathbb{R}^N), i = 1, \dots, N\}.$$

Para $u, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, denotemos por

$$\langle u, v \rangle := \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{y} \quad \|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \right)^{1/2}. \quad (7.2)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y este espacio resulta ser de Hilbert. Además, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ es denso en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. La desigualdad de Sobolev es válida en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, es

decir,

$$S := \inf_{\substack{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2} > 0.$$

La demostración de estas afirmaciones se sugiere en la Tarea 9.

Si Ω es un dominio en $\mathbb{R}^N$ definimos

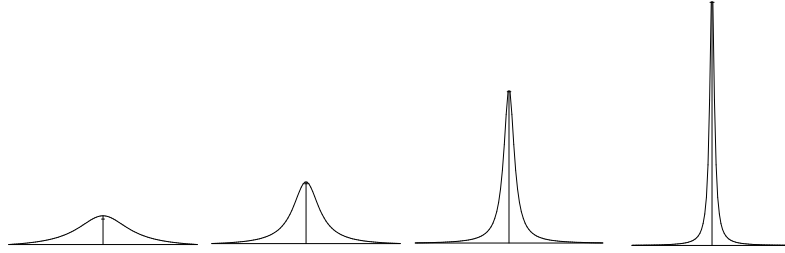
$$D_0^{1,2}(\Omega) := \text{la cerradura de } \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \text{ en } D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Puesto que es cerrado, éste es un subespacio de Hilbert de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Si Ω es un dominio acotado, $D_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ y la norma de $D_0^{1,2}(\Omega)$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$ de $H_0^1(\Omega)$.

Para $\varepsilon > 0$ definimos la ε -**dilatación** $u_\varepsilon : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ de una función $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$u_\varepsilon(x) := \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} u(\varepsilon^{-1}x).$$

La siguiente figura ilustra ε -dilataciones de una función para ε cada vez más pequeño:



Es fácil comprobar que, si $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, entonces $u_\varepsilon \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^{2^*} = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}, \quad (7.3)$$

para todo $\varepsilon > 0$. Es usual referirse a estas identidades como **la invariancia bajo dilataciones**. Ellas son las responsables de que no valga el teorema de Rellich-Kondrashov para el exponente crítico.

Proposición 7.1 *Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$. La inclusión $D_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ no es compacta, es decir, existen sucesiones acotadas en $D_0^{1,2}(\Omega)$ que no contienen ninguna subsucesión convergente en $L^{2^*}(\Omega)$.*

Demostración: Sin perder generalidad podemos suponer que Ω contiene al origen. Toma $r > 0$ de modo que la bola $B_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < r\}$ esté contenida en Ω y fija

$\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi \neq 0$ y $\text{sop}(\varphi) \subset B_r(0)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ considera la $\frac{1}{k}$ -dilatación $\varphi_{1/k}(x) = k^{(N-2)/2} \varphi(kx)$. Entonces $\varphi_{1/k} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$\|\varphi_{1/k}\| = \|\varphi\| \quad \text{y} \quad |\varphi_{1/k}|_{2^*} = |\varphi|_{2^*}.$$

En particular, $(\varphi_{1/k})$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$. Si esta sucesión contuviera una subsucesión convergente a u en $L^{2^*}(\Omega)$ entonces $|u|_{2^*} = |\varphi|_{2^*} \neq 0$, y una subsucesión convergería puntualmente a u casi dondequiera en Ω (consulta, por ejemplo, [32, Teorema 19.12]). Pero $\varphi_{1/k}(x) \rightarrow 0$ para toda $x \neq 0$. Por tanto, $u = 0$ casi dondequiera en Ω . Esta es una contradicción; lo cual prueba que $(\varphi_{1/k})$ no contiene ninguna subsucesión convergente en $L^{2^*}(\Omega)$. ■

Denotemos por

$$S_\Omega := \inf_{\substack{u \in D_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2}.$$

Proposición 7.2 *Se cumple que $S_\Omega = S$ y este ínfimo no se alcanza si $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} \neq \emptyset$.*

Demostración: Claramente, $S_\Omega \geq S$. Probemos que son iguales.

Sea $\varphi_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\varphi_k\|^2}{|\varphi_k|_{2^*}^2} = S.$$

Sin perder generalidad podemos suponer que Ω contiene al origen. Sea $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset \Omega$. Escogemos $\varepsilon_k > 0$ de modo que la ε_k -dilatación $u_k := (\varphi_k)_{\varepsilon_k}$ de φ_k satisfaga que $\text{supp}(u_k) \subset B_r(0)$. Entonces $u_k \in D_0^{1,2}(\Omega)$ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|u_k\|^2}{|u_k|_{2^*}^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\varphi_k\|^2}{|\varphi_k|_{2^*}^2} = S.$$

En consecuencia, $S \geq S_\Omega$. Esto demuestra que $S_\Omega = S$.

Si existiera $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$, $u \neq 0$, tal que

$$\frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2} = S_\Omega = S,$$

entonces u sería un mínimo del funcional

$$J(u) := \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2^*} |u|_{2^*}^{2^*}$$

sobre la variedad de Nehari

$$\mathcal{N} = \{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : u \neq 0, \|u\|^2 = |u|_{2^*}^{2^*}\},$$

y satisfaría la ecuación

$$-\Delta u - |u|^{2^*-2}u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N.$$

Esto contradice al principio de continuación única, pues u se anula en $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$. ■

7.2. La identidad de Pohozaev

Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.4)$$

donde Ω es un abierto acotado suave en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, y $f \in C^0(\mathbb{R})$.

Recordemos que la divergencia de un campo vectorial $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_N) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ de clase C^1 se define como

$$\operatorname{div}(\chi) := \sum_{i=1}^N \frac{\partial \chi_i}{\partial x_i}.$$

Observa que, si $\chi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ y $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^1 , entonces

$$\operatorname{div}(h\chi) = \nabla h \cdot \chi + h [\operatorname{div}(\chi)].$$

La siguiente identidad debida a Pohozaev [46] da una condición necesaria para la existencia de soluciones del problema (7.4).

Teorema 7.3 (Identidad de Pohozaev, 1965) *Toda solución $u \in C^2(\overline{\Omega})$ del problema (7.4) satisface la identidad*

$$\frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - N \int_{\Omega} F(u) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \sigma \cdot \nu \, d\sigma = 0$$

donde ν es la normal unitaria exterior y $F(t) := \int_0^t f(s) \, ds$.

Demostración: Se tiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(F(u)x) &= f(u)\nabla u \cdot x + F(u)\operatorname{div}(x) \\ &= f(u)(\nabla u \cdot x) + NF(u),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}((\nabla u \cdot x)\nabla u) &= \nabla(\nabla u \cdot x) \cdot \nabla u + (\nabla u \cdot x)\operatorname{div}(\nabla u) \\ &= |\nabla u|^2 + \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right) \cdot x + (\nabla u \cdot x)\Delta u \\ &= |\nabla u|^2 + \operatorname{div} \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} x \right) - N \frac{|\nabla u|^2}{2} + \Delta u(\nabla u \cdot x) \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} x \right) - \frac{N-2}{2} |\nabla u|^2 + \Delta u(\nabla u \cdot x).\end{aligned}$$

Como u es solución del problema (7.4), de las desigualdades anteriores obtenemos

$$\begin{aligned}0 &= (\Delta u + f(u))(\nabla u \cdot x) \\ &= \frac{N-2}{2} |\nabla u|^2 - NF(u) + \operatorname{div}((\nabla u \cdot x)\nabla u - \frac{|\nabla u|^2}{2} x + F(u)x).\end{aligned}$$

Integrando esta identidad y aplicando la fórmula de Green concluimos que

$$\begin{aligned}0 &= \frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - N \int_{\Omega} F(u) + \int_{\Omega} \operatorname{div} \left((\nabla u \cdot x)\nabla u - \frac{|\nabla u|^2}{2} x + F(u)x \right) dx \\ &= \frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - N \int_{\Omega} F(u) + \int_{\partial\Omega} \left((\nabla u \cdot \sigma)\nabla u - \frac{|\nabla u|^2}{2} \sigma + F(u)\sigma \right) \cdot \nu \, d\mathcal{H}^n\end{aligned}$$

donde ν es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$.

Ahora bien, como $u = 0$ en $\partial\Omega$, se tiene que

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu} \nu \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Por tanto, como $|\nu| = 1$,

$$|\nabla u|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

y

$$(\nabla u \cdot \sigma)(\nabla u \cdot \nu) = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \sigma \cdot \nu \right) \frac{\partial u}{\partial \nu} = \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \sigma \cdot \nu \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Por otra parte, como $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ y $F(0) = 0$,

$$\int_{\partial\Omega} F(u) \sigma \cdot \nu \, d\sigma = 0.$$

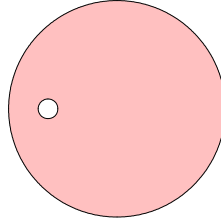
En consecuencia,

$$\int_{\partial\Omega} \left((\nabla u \cdot \sigma) \nabla u - \frac{|\nabla u|^2}{2} \sigma + F(u) \sigma \right) \cdot \nu \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \nu \cdot \sigma \, d\sigma.$$

Insertando ésta en la identidad (7.5) obtenemos la identidad deseada. ■

Definición 7.4 *Un dominio acotado suave Ω es estrellado respecto al origen si $\sigma \cdot \nu \geq 0$ para todo $\sigma \in \partial\Omega$, y es estrictamente estrellado respecto al origen si $\sigma \cdot \nu > 0$ para todo $\sigma \in \partial\Omega$.*

Más en general, Ω es estrellado (estrictamente estrellado) si alguna traslación de Ω es estrellado (estrictamente estrellado) respecto al origen. Los dominios convexos - las bolas, por ejemplo - son estrictamente estrellados. La siguiente figura ilustra un dominio que no es estrellado:



Se trata de una bola de cuyo interior hemos extraído una bola cerrada pequeña. Observa que desde cualquier punto x_0 de este dominio parte un rayo que es tangente a la frontera de la bola pequeña.

Corolario 7.5 *Sean Ω un abierto acotado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\lambda \geq 0$ y $p \geq 2^*$.*

(a) *Si Ω es estrellado con respecto al origen y, o bien $\lambda > 0$, o bien $p > 2^*$, entonces el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2} u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.6)$$

no tiene ninguna solución no trivial.

(b) Si Ω es estrictamente estrellado respecto al origen, entonces el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2} u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.7)$$

no tiene ninguna solución no trivial.

Demostración: (a): Sea $u \in C^2(\bar{\Omega})$ una solución del problema (7.6). Entonces

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} \lambda u^2 = \int_{\Omega} |u|^p.$$

Aplicando la identidad de Pohozaev con $F(t) = -\frac{\lambda}{2}t^2 + \frac{1}{p}|t|^p$, dividiendo entre N y usando la igualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2N} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \nu \cdot \sigma &= \frac{N-2}{2N} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda u^2 - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p \\ &= \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{p} \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\Omega} \lambda u^2. \end{aligned}$$

Como $\sigma \cdot \nu \geq 0$ sobre $\partial\Omega$,

$$\left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{p} \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \int_{\Omega} \lambda u^2 \leq 0.$$

Así pues, si $\lambda \geq 0$ y $p > 2^*$, o si $\lambda > 0$ y $p \geq 2^*$, entonces necesariamente $u = 0$.

(b): Análogamente, si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ es solución del problema (7.7) entonces

$$\int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \nu \cdot \sigma = 0.$$

En consecuencia, $\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \nu \cdot \sigma = 0$ sobre $\partial\Omega$ y, como Ω es estrictamente estrellado, necesariamente $\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$. Puesto que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, se tiene que $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$. Por tanto, la extensión trivial $\bar{u} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ de u a $\mathbb{R}^N$ dada por

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases}$$

es de clase C^1 . Obviamente satisface

$$-\Delta \bar{u} - |\bar{u}|^{2^*-2} \bar{u} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N,$$

lo cual contradice el principio de continuación única. ■

7.3. Soluciones de energía mínima en $\mathbb{R}^N$

En contraste con la Proposición 7.2, veremos que S sí se alcanza en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$.

7.3.1. Un fenómeno de explosión

Sea Ω un dominio acotado suave en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Para cada $p \in (2, 2^*]$ consideremos el problema

$$(\wp_p) \quad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

Denotemos por

$$J_p(u) := \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p$$

al funcional asociado, cuyo dominio es el espacio $D_0^{1,2}(\Omega)$. Recuerda que, si Ω es un dominio acotado, $D_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ y la norma de $D_0^{1,2}(\Omega)$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$ de $H_0^1(\Omega)$.

Las soluciones no triviales del problema $(\wp_p)$ son los puntos críticos de la restricción de este funcional a la variedad de Nehari

$$\mathcal{N}_p = \mathcal{N}_p(\Omega) := \left\{ u \in D_0^{1,2}(\Omega) : u \neq 0, \|u\|^2 = |u|_p^p \right\}.$$

Sea

$$c_p = c_p(\Omega) := \inf_{u \in \mathcal{N}_p(\Omega)} J_p(u). \quad (7.8)$$

Por simplicidad, escribiremos J_* , $\mathcal{N}_*^\phi$ y c_*^ϕ en vez de J_{2^*} , $\mathcal{N}_{2^*}^\phi$ y $c_{2^*}^\phi$.

Si $p \in (2, 2^*)$ este ínfimo se alcanza (ver Proposición 4.21). En cambio, si $p = 2^*$, es sencillo comprobar que $c_* = \frac{1}{N} S^{N/2}$ y que, dado que S no se alcanza en un dominio acotado (ver Proposición 7.2), c_* tampoco se alcanza.

Sea $u_p \in \mathcal{N}_p$ tal que $J_p(u_p) = c_p$ y sea $t_p \in (0, \infty)$ tal que $\tilde{u}_p := t_p u_p \in \mathcal{N}_*$, i.e.,

$$t_p = \left(\frac{\|u_p\|^2}{|u_p|_{2^*}^{2^*}} \right)^{\frac{1}{2^*-2}} = \left(\frac{|u_p|_p^p}{|u_p|_{2^*}^{2^*}} \right)^{\frac{1}{2^*-2}}.$$

Lema 7.6 *Se cumple que*

$$\lim_{p \rightarrow 2^*} c_p = c_*, \quad \lim_{p \rightarrow 2^*} t_p = 1, \quad \lim_{p \rightarrow 2^*} J_*(\tilde{u}_p) = c_*.$$

Demostración: Sea $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$, $u \neq 0$. De la desigualdad de Hölder se sigue que

$$|\Omega|^{\frac{2(p-2^*)}{2^*p}} \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2} \leq \frac{\|u\|^2}{|u|_p^2} \leq |\Omega|^{\frac{p-2}{p}} \frac{\|u\|^2}{|u|_2^2} \quad \forall p \in (2, 2^*). \quad (7.9)$$

Sea $S_p := \inf_{u \in D_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^2}{|u|_p^2}$. Tomando el ínfimo sobre todo $u \in D_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ en las desigualdades (7.9) obtenemos

$$|\Omega|^{\frac{2(p-2^*)}{2^*p}} S \leq S_p \leq |\Omega|^{\frac{p-2}{p}} S_2$$

y, pasando al límite cuando $p \rightarrow 2^*$, obtenemos

$$S \leq \liminf_{p \rightarrow 2^*} S_p \leq \limsup_{p \rightarrow 2^*} S_p \leq |\Omega|^{2/N} S_2 < \infty.$$

Probaremos a continuación que $\lim_{p \rightarrow 2^*} S_p = S$.

Argumentando por contradicción, supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $S + \varepsilon < \limsup_{p \rightarrow 2^*} S_p$. Sea $\tilde{u} \in D_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que

$$\frac{\|\tilde{u}\|^2}{|\tilde{u}|_{2^*}^2} < S + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como la función $p \mapsto |\tilde{u}|_p$ es continua, existe $q \in (2, 2^*)$ tal que

$$\left| \frac{\|\tilde{u}\|^2}{|\tilde{u}|_{2^*}^2} - \frac{\|\tilde{u}\|^2}{|\tilde{u}|_p^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall p \in [q, 2^*).$$

Por tanto,

$$S_p \leq \frac{\|\tilde{u}\|^2}{|\tilde{u}|_p^2} < S + \varepsilon < \limsup_{p \rightarrow 2^*} S_p \quad \forall p \in [q, 2^*),$$

lo cual es una contradicción. En consecuencia, $S = \lim_{p \rightarrow 2^*} S_p$.

Un cálculo sencillo muestra que $c_p = \frac{p-2}{2p} (S_p)^{\frac{p}{p-2}}$. Por tanto,

$$c_* = \lim_{p \rightarrow 2^*} c_p.$$

Por otra parte, de la desigualdad (7.9) se sigue que

$$|\Omega|^{\frac{2(p-2^*)}{2^*p}} S \leq |\Omega|^{\frac{2(p-2^*)}{2^*p}} \frac{\|u_p\|^2}{|u_p|_{2^*}^2} \leq \frac{\|u_p\|^2}{|u_p|_p^2} = S_p$$

y, pasando al límite, obtenemos

$$\lim_{p \rightarrow 2^*} \frac{\|u_p\|^2}{|u_p|_{2^*}^2} = \lim_{p \rightarrow 2^*} \frac{\|u_p\|^2}{|u_p|_p^2} = S. \quad (7.10)$$

Dado que $c_p = \frac{p-2}{2p} \|u_p\|^2$, se tiene que $\lim_{p \rightarrow 2^*} \|u_p\|^2 = N_{c_*}$. De la existencia de este último límite y la identidad (7.10) se sigue que $\lim_{p \rightarrow 2^*} |u_p|_p^2 = \lim_{p \rightarrow 2^*} |u_p|_{2^*}^2$. En consecuencia $\lim_{p \rightarrow 2^*} t_p = 1$ y

$$\lim_{p \rightarrow 2^*} J_*(\tilde{u}_p) = \lim_{p \rightarrow 2^*} \frac{p-2}{2p} \|\tilde{u}_p\|^2 = \lim_{p \rightarrow 2^*} t_p^2 c_p = c_*,$$

como afirma el enunciado. ■

Consideremos ahora el problema

$$(\wp_\infty) \quad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2} u, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

y denotemos por

$$J_\infty(u) := \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2^*} |u|_{2^*}^{2^*},$$

$$\mathcal{N}_\infty := \{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : u \neq 0, \|u\|^2 = |u|_{2^*}^{2^*}\}$$

al funcional de energía y la variedad de Nehari asociados al problema $(\wp_\infty)$. Sea

$$c_\infty := \inf_{u \in \mathcal{N}_\infty^\phi} J_\infty(u). \quad (7.11)$$

Es sencillo comprobar que $c_\infty = \frac{1}{N} S^{N/2}$. Probaremos que este ínfimo sí se alcanza.

Lema 7.7 *Si $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$, entonces*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega |u_k|^{2^*-2} u_k \varphi = \int_\Omega |u|^{2^*-2} u \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Demostración: Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Elegimos un dominio acotado U tal que $\text{sop}(\varphi) \subset U \subset \Omega$ y un número $p \in (2^* - 1, 2^*)$. Por el teorema de Rellich-Kondrashov (Teorema 3.23), $u_k \rightarrow u$ fuertemente en $L^p(U)$. La función

$$L^p(U) \longrightarrow L^{\frac{p}{2^*-1}}(U), \quad v \longmapsto |v|^{2^*-2} v,$$

está bien definida y es continua (ver Proposición 4.7). En consecuencia,

$$|u_k|^{2^*-2} u_k \longrightarrow |u|^{2^*-2} u \quad \text{en } L^{\frac{p}{2^*-1}}(U).$$

Usando la desigualdad de Hölder concluimos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} |u_k|^{2^*-2} u_k \varphi - \int_{\Omega} |u|^{2^*-2} u \varphi \right| &\leq \int_{\Omega} \left| |u_k|^{2^*-2} u_k - |u|^{2^*-2} u \right| |\varphi| \\ &\leq \left| |u_k|^{2^*-2} u_k - |u|^{2^*-2} u \right|_{\frac{p}{2^*-1}} |\varphi|_{\frac{p}{p-(2^*-1)}} \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

como afirma el enunciado. ■

Lema 7.8 Sea $\mathbb{H} := \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$. Si $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y $u = 0$ c.d. en $\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{H}$, entonces $u \in D_0^{1,2}(\mathbb{H})$.

Demostración: Probaremos primero que $\varphi u \in D_0^{1,2}(\mathbb{H})$ para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Para ello, tomemos una sucesión de funciones $\rho_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tales que $\rho_k \geq 0$, $\text{sop}(\rho_k) \subset \{x \in \overline{B_{\frac{1}{k}}}(0) : x_N \geq \frac{1}{2k}\}$ y $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_k = 1$. La convolución $\rho_k * \varphi u$ [14, Sección 14.3] satisface

$$\begin{aligned} \rho_k * \varphi u &\in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N), \\ \text{sop}(\rho_k * \varphi u) &\subset \{x \in \mathbb{R}^N : x_N \geq \frac{1}{2k}\}, \\ \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_k * \varphi u) &= \rho_k * D_i(\varphi u) \longrightarrow D_i(\varphi u) \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

para cada $i = 1, \dots, N$. Por tanto, $\rho_k * \varphi u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{H})$ y $\rho_k * \varphi u \rightarrow \varphi u$ en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Esto implica que $\varphi u \in D_0^{1,2}(\mathbb{H})$.

Probaremos ahora que existe una sucesión $\varphi_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi_k u \rightharpoonup u$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Para ello elegimos $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ y $\chi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$, y definimos $\varphi_k(x) := \chi(\frac{x}{k})$. Sea $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Si $\text{sop}(\psi) \subset B_r(0)$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla(\varphi_k u) \cdot \nabla \psi = \int_{B_r(0)} [\varphi_k \nabla u \cdot \nabla \psi + u \nabla \varphi_k \cdot \nabla \psi] = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla \psi \quad \forall k \geq r.$$

Esto prueba que $\varphi_k u \rightharpoonup u$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Como $\varphi_k u \in D_0^{1,2}(\mathbb{H})$ y $D_0^{1,2}(\mathbb{H})$ es débilmente cerrado en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ concluimos que $u \in D_0^{1,2}(\mathbb{H})$, como afirma el enunciado. ■

Teorema 7.9 *Sea $p_k \in (2, 2^*)$ tal que $p_k \rightarrow 2^*$ y sea $u_k \in \mathcal{N}_{p_k}$ tal que $J_{p_k}(u_k) = c_{p_k}$. Entonces, para una subsucesión de (u_k) a la que denotaremos del mismo modo, existen sucesiones (ζ_k) en Ω y (ε_k) en $(0, \infty)$, y una solución no trivial ω del problema $(\wp_\infty)$ tales que*

$$(i) \quad \varepsilon_k^{-1} \text{dist}(\zeta_k, \partial\Omega) \rightarrow \infty \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty,$$

$$(ii) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - \omega_k\| = 0, \quad \text{donde } \omega_k(x) := \varepsilon_k^{\frac{2-N}{2}} \omega\left(\frac{x-\zeta_k}{\varepsilon_k}\right),$$

$$(iii) \quad J_\infty(\omega) = c_\infty.$$

Demostración: Como la demostración es larga, la subdividimos en varios pasos.

PASO 1: Sea $t_k \in (0, \infty)$ tal que $\tilde{u}_k := t_k u_k \in \mathcal{N}_*$. El Lema 7.6 asegura que $t_k \rightarrow 1$ y que $(\tilde{u}_k)$ es una sucesión minimizante para J_* sobre $\mathcal{N}_*$. El principio variacional de Ekeland asegura entonces que existe una sucesión (v_k) en $\mathcal{N}_*$ tal que

$$J_*(v_k) \rightarrow c_*, \quad \nabla J_*(v_k) \rightarrow 0 \text{ en } D_0^{1,2}(\Omega), \quad \|u_k - v_k\| \rightarrow 0. \quad (7.12)$$

Observa que $J_*(v_k) = \frac{1}{N} \|v_k\|^2 = \frac{1}{N} |v_k|_{2^*}^{2^*}$. Por tanto, (v_k) está acotada en $D_0^{1,2}(\Omega)$ y, pasando a una subsucesión, se tiene que $v_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$.

Probaremos primero que $u = 0$. Argumentando por contradicción, supongamos que $u \neq 0$. Por el Lema 7.7, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se tiene que

$$\begin{aligned} J'_*(u)\varphi &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi - \int_\Omega |u|^{2^*-2} u \varphi \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega \nabla v_k \cdot \nabla \varphi - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega |v_k|^{2^*-2} v_k \varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} J'_*(v_k)\varphi = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, u es solución del problema $(\wp_{2^*})$ y, como $u \neq 0$, se cumple que $u \in \mathcal{N}_*$. En consecuencia,

$$c_* \leq J_*(u) = \frac{1}{N} \|u\|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \|v_k\|^2 = \liminf_{k \rightarrow \infty} J(v_k) = c_*.$$

Esto prueba que $J_*(u) = c_*$, lo que contradice a la Proposición 7.2. Así pues, $u = 0$.

PASO 2: Elegimos $\delta \in (0, \frac{N}{2}c_*)$. Para cada u_k consideramos la función $Q : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Q_k(r) := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{B_r(x)} |v_k|^{2^*}.$$

Esta función es continua, no decreciente, y satisface que $Q_k(0) = 0$ y que $Q_k(r) = |v_k|_{2^*}^{2^*}$ para toda $r \geq \frac{1}{2}R$ donde R denota al diámetro de Ω . Como $|v_k|_{2^*}^{2^*} \rightarrow Nc_*$ se tiene que, para k suficientemente grande, existen $\varepsilon_k \in (0, \frac{1}{2}R)$ y $\zeta_k \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$\delta = Q_k(\varepsilon_k) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{B_{\varepsilon_k}(x)} |v_k|^{2^*} = \int_{B_{\varepsilon_k}(\zeta_k)} |v_k|^{2^*}. \quad (7.13)$$

Como $\delta > 0$, necesariamente $\text{dist}(\zeta_k, \Omega) \leq \varepsilon_k < \frac{1}{2}R$, así que (ζ_k) está acotada.

PASO 3: Sea $\Omega_k := \{z \in \mathbb{R}^N : \varepsilon_k z + \zeta_k \in \Omega\}$. Para $z \in \Omega_k$, definimos

$$w_k(z) := \varepsilon_k^{\frac{N-2}{2}} v_k(\varepsilon_k z + \zeta_k).$$

Haciendo un cambio de variable, de la afirmación (7.13) se obtiene

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(z)} |w_k|^{2^*} = \int_{B_1(0)} |w_k|^{2^*} = \delta. \quad (7.14)$$

Como $\|w_k\| = \|v_k\|$, la sucesión (w_k) está acotada en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y, para una subsucesión, se tiene que $w_k \rightharpoonup w$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $w_k \rightarrow w$ fuertemente en $L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$, y $w_k \rightarrow w$ c.d. en $\mathbb{R}^N$.

Dada $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, definimos $\varphi_k(x) := \varphi(\frac{x-\zeta_k}{\varepsilon_k})$. Se tiene entonces que $\|\varphi^2 w_k\| = \|\varphi_k^2 v_k\|$. En consecuencia $(\varphi_k^2 v_k)$ está acotada en $D_0^{1,2}(\Omega)$ y, como $\nabla J_*(v_k) \rightarrow 0$ en $D_0^{1,2}(\Omega)$, se cumple que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} \nabla w_k \cdot \nabla (\varphi^2 w_k) - \int_{\Omega_k} \varphi^2 |w_k|^{2^*} &= \int_{\Omega} \nabla v_k \cdot \nabla (\varphi_k^2 v_k) - \int_{\Omega} \varphi_k^2 |v_k|^{2^*} \\ &= J'_*(v_k) [\varphi_k^2 v_k] = o(1). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Probaremos a continuación que $w \neq 0$. Argumentando por contradicción, supongamos que $w = 0$. Entonces $w_k \rightarrow 0$ en $L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B_1(z))$ con $z \in \mathbb{R}^N$. Usando la identidad (7.15), la desigualdad de Hölder, la identidad (7.14) y que $\delta < \frac{N}{2}c_* = \frac{1}{2}S^{N/2}$,

obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_k} |\nabla(\varphi w_k)|^2 &= \int_{\Omega_k} |\varphi \nabla w_k + w_k \nabla \varphi|^2 \\
&= \int_{\Omega_k} \varphi^2 |\nabla w_k|^2 + \int_{\Omega_k} 2\varphi w_k \nabla w_k \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega_k} w_k^2 |\nabla \varphi|^2 \\
&= \int_{\Omega_k} \nabla w_k \cdot \nabla(\varphi^2 w_k) + o(1) \\
&= \int_{\Omega_k} \varphi^2 |w_k|^{2^*} + o(1) \\
&= \int_{B_1(z) \cap \Omega_k} |\varphi w_k|^2 |w_k|^{2^*-2} + o(1) \\
&\leq \left(\int_{B_1(z)} |w_k|^{2^*} \right)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \left(\int_{\Omega_k} |\varphi w_k|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} + o(1) \\
&\leq \delta^{2/N} S^{-1} \int_{\Omega_k} |\nabla(\varphi w_k)|^2 + o(1) \\
&< \left(\frac{1}{2} \right)^{2/N} \int_{\Omega_k} |\nabla(\varphi w_k)|^2 + o(1).
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\|\varphi w_k\|^2 = \int_{\Omega_k} |\nabla(\varphi w_k)|^2 = o(1)$ y, como $S|\varphi w_k|_{2^*}^2 \leq \|\varphi w_k\|^2$, concluimos que $|\varphi w_k|_{2^*}^{2^*} = o(1)$ para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B_1(z))$, $z \in \mathbb{R}^N$. Esto implica que $w_k \rightarrow 0$ en $L_{loc}^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, lo cual contradice a la afirmación (7.14). Queda así demostrado que $w \neq 0$.

PASO 4: Sean (ζ_k) y (ε_k) las sucesiones definidas en el Paso 2. Como estas sucesiones están acotadas, pasando a una subsucesión, se cumple que $\zeta_k \rightarrow \zeta$ en $\mathbb{R}^N$ y que $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon$ en $[0, \infty)$. Si $\varepsilon > 0$ definimos $v(x) := \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} w(\frac{x-\zeta}{\varepsilon})$ y $\widehat{v}_k(x) := \varepsilon_k^{\frac{N-2}{2}} v(\varepsilon_k z + \zeta_k)$. Entonces $\|\widehat{v}_k - w\| \rightarrow 0$ y, como $v_k \rightarrow 0$ y $w_k \rightharpoonup w$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_k \cdot \nabla v = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_k \cdot \nabla \widehat{v}_k \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_k \cdot \nabla w + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_k \cdot \nabla (\widehat{v}_k - w) = \|w\|^2 \neq 0,
\end{aligned}$$

una contradicción. En consecuencia, $\varepsilon_k \rightarrow 0$.

PASO 5: Sea

$$d_k := \varepsilon_k^{-1} \text{dist}(\zeta_k, \partial\Omega).$$

Pasando a una subsucesión se tiene que $d_k \rightarrow d \in [0, \infty]$. Denotemos por ν_ξ a la normal unitaria en cada punto $\xi \in \partial\Omega$, que apunta hacia el interior a Ω . Como $\partial\Omega$ es suave y

compacta existe $r_0 > 0$ tal que

$$B_{r_0}(\xi + r_0\nu_\xi) \subset \overline{\Omega} \quad \text{y} \quad B_{r_0}(\xi - r_0\nu_\xi) \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega \quad \forall \xi \in \partial\Omega. \quad (7.16)$$

Probaremos que, si $d \in [0, \infty)$, entonces existe un semiespacio $\mathbb{H}$ de $\mathbb{R}^N$ tal que w es una solución no trivial del problema

$$-\Delta u = |u|^{2^*-2}u, \quad u \in D_0^{1,2}(\mathbb{H}) \quad (7.17)$$

y que, si $d = \infty$, entonces w es una solución no trivial del problema

$$-\Delta u = |u|^{2^*-2}u, \quad u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \quad (7.18)$$

Supongamos primero que $d \in [0, \infty)$. Entonces, como $\varepsilon_k \rightarrow 0$, se cumple que $\text{dist}(\zeta_k, \partial\Omega) \rightarrow 0$. Por tanto, $\zeta \in \partial\Omega$ y, para k suficientemente grande, existe un único $\xi_k \in \partial\Omega$ tal que $|\zeta_k - \xi_k| = \text{dist}(\zeta_k, \partial\Omega)$. Hay dos posibilidades:

(i) Una subsucesión de (ζ_k) está en $\overline{\Omega}$. En este caso, $\zeta_k - \xi_k = d_k \varepsilon_k \nu_{\xi_k}$, y la imagen bajo la transformación $x \mapsto \frac{x - \zeta_k}{\varepsilon_k}$ del semiespacio que contiene a $\xi_k + \nu_{\xi_k}$ cuya frontera es el espacio tangente a $\partial\Omega$ en el punto ξ_k es el semiespacio

$$\mathbb{H}_k := \{z \in \mathbb{R}^N : \nu_{\xi_k} \cdot z > -d_k\}.$$

Definimos

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{R}^N : \nu_\zeta \cdot z > -d\}.$$

Es sencillo comprobar que, para cualquier subconjunto compacto X de $\mathbb{R}^N$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \text{si } X \subset \mathbb{H} & \quad \text{entonces } X \subset \Omega_k \quad \forall k \geq k_0, \\ \text{si } X \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{H}} & \quad \text{entonces } X \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega_k \quad \forall k \geq k_0. \end{aligned}$$

En efecto, si X es compacto y $X \subset \mathbb{H}$, existe $r > 0$ tal que X está contenido en la bola $B_{d_k+r}(r\nu_{\xi_k})$ de radio $d_k + r$ tangente a $\partial\mathbb{H}_k$ en el punto $-d_k\nu_{\xi_k} = \frac{\xi_k - \zeta_k}{\varepsilon_k}$ para k suficientemente grande. La transformación $z \mapsto \varepsilon_k z + \zeta_k$ aplica a $B_{d_k+r}(r\nu_{\xi_k})$ en la bola $B_{\varepsilon_k(d_k+r)}(\xi_k + \varepsilon_k(d_k + r)\nu_{\xi_k})$ de radio $\varepsilon_k(d_k + r)$ tangente a $\partial\Omega$ en ξ_k . Para k suficientemente grande, $\varepsilon_k(d_k + r) \leq r_0$. Por tanto,

$$B_{\varepsilon_k(d_k+r)}(\xi_k + \varepsilon_k(d_k + r)\nu_{\xi_k}) \subset B_{r_0}(\xi_k + r_0\nu_\xi) \subset \Omega$$

y, en consecuencia, $X \subset B_{d_k+r}(r\nu_{\xi_k}) \subset \Omega_k$. Procediendo de manera análoga, se demuestra que, si $X \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{H}}$, entonces $X \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega_k$ para k suficientemente grande.

(ii) Una subsucesión de (ζ_k) está en $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. En este caso, $\zeta_k - \xi_k = -d_k \varepsilon_k \nu_{\xi_k}$, y la imagen bajo la transformación $x \mapsto \frac{x - \zeta_k}{\varepsilon_k}$ del semiespacio que contiene a $\xi_k + \nu_{\xi_k}$ cuya frontera es el espacio tangente a $\partial\Omega$ en el punto ξ_k es el semiespacio

$$\mathbb{H}_k := \{z \in \mathbb{R}^N : \nu_{\xi_k} \cdot z > d_k\}.$$

Definimos

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{R}^N : \nu_\zeta \cdot z > d\}.$$

Argumentando como antes se prueba que, si X es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \text{si } X \subset \mathbb{H} & \quad \text{entonces } X \subset \Omega_k \quad \forall k \geq k_0, \\ \text{si } X \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{H}} & \quad \text{entonces } X \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega_k \quad \forall k \geq k_0. \end{aligned}$$

Así pues, en ambos casos se tiene que, si $z \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{H}}$, entonces $z \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_k$ para $k \geq k_0$. Como $w_k(z) = 0$ para $z \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_k$ y $w_k \rightarrow w$ c.d. en $\mathbb{R}^N$, concluimos que $w = 0$ c.d. en $\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{H}$. El Lema 7.8 asegura entonces que $w \in D_0^{1,2}(\mathbb{H})$. Se tiene además que, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{H})$, entonces $\text{sop}(\varphi) \subset \Omega_k$ para k suficientemente grande. Así que, si definimos $\varphi_k(x) := \varepsilon_k^{\frac{2-N}{2}} \varphi(\varepsilon_k^{-1}(x - \zeta_k))$, entonces $\varphi_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ y (φ_k) está acotada en $D_0^{1,2}(\Omega)$. Como $\nabla J_*(v_k) \rightarrow 0$ en $D_0^{1,2}(\Omega)$ y $w_k \rightharpoonup w$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, tomando el límite de la identidad

$$\int_{\Omega_k} \nabla w_k \cdot \nabla \varphi - \int_{\Omega_k} |w_k|^{2^*-2} w_k \varphi = \int_{\Omega} \nabla v_k \cdot \nabla \varphi_k - \int_{\Omega} |v_k|^{2^*-2} v_k \varphi_k = J'_*(v_k) \varphi_k,$$

cuando $k \rightarrow \infty$, concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \cdot \nabla \varphi - \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{2^*-2} w \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{H}).$$

Esto prueba que w es una solución no trivial del problema (7.17).

Supongamos ahora que $d = \infty$. Entonces, para cualquier $r \geq 1$, se cumple que $\text{dist}(\zeta_k, \partial\Omega) \geq (r+1)\varepsilon_k$ para $k \geq k_0$. En el Paso 2 vimos que $\text{dist}(\zeta_k, \Omega) \leq \varepsilon_k < \frac{1}{2}R$. Por tanto, $\zeta_k \in \Omega$ y $B_{\varepsilon_k r}(\zeta_k) \subset \Omega$ para $k \geq k_0$. De esta última afirmación se sigue que, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, entonces $\text{sop}(\varphi) \subset \Omega_k$ para k suficientemente grande y, argumentando como en el párrafo anterior, concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \cdot \nabla \varphi - \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{2^*-2} w \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

es decir, w es una solución no trivial del problema (7.18).

PASO 6: En cualquier caso, $w \in \mathcal{N}_\infty$. Así que, como $w_k \rightharpoonup w$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, usando el Lema 6.32 obtenemos

$$\begin{aligned} c_\infty &\leq \frac{1}{N} \|w\|^2 \leq \frac{1}{N} \|w\|^2 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \|w_k - w\|^2 \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \|w_k\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \|v_k\|^2 = c_* = c_\infty, \end{aligned} \tag{7.19}$$

Esto implica que $J_\infty(w) = \frac{1}{N} \|w\|^2 = c_\infty$. Pero la Proposición 7.2 asegura que el problema (7.17) no tiene una solución no trivial de energía mínima. Así que, necesariamente, $d = \infty$ y w es una solución no trivial del problema (7.18). De la identidad (7.19) se sigue además que

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|w_k - w\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| v_k - \varepsilon_k^{\frac{2-N}{2}} w \left(\frac{\cdot - \zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \right\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - w_{\varepsilon_k}\|^2,$$

como afirma el teorema. ■

Destacamos la siguiente consecuencia del teorema anterior.

Teorema 7.10 *El problema*

$$(\wp_\infty) \quad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

tiene una solución ω , positiva y radialmente simétrica con respecto al origen, tal que $J_\infty(\omega) = c_\infty$.

Demostración: La demostración de la simetría y la positividad es idéntica a la del caso subcrítico. ■

7.3.2. La burbuja estándar

Aubin y Talenti [1, ?] dieron una fórmula explícita para las soluciones de energía mínima del problema $(\wp_\infty)$. Probaron que éstas son precisamente las translaciones y dilataciones de la función

$$U(x) := a_N \left(\frac{1}{1 + |x|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}}, \quad a_N = (N(N-2))^{\frac{N-2}{4}},$$

es decir, son las funciones

$$U_{\varepsilon,y}(x) = a_N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x - y|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}}, \quad \varepsilon > 0, y \in \mathbb{R}^N,$$

que reciben el nombre de *burpujas estándar*. Veremos que, en efecto, estos son los mínimos de J_∞ en $\mathcal{N}_\infty(\mathbb{R}^N)$. Empecemos probando el siguiente resultado.

Lema 7.11 Sea $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ una función positiva y radialmente simétrica con respecto al origen, es decir, $u(x) = v(|x|)$. Entonces u es solución del problema $(\wp_\infty)$ si y sólo si $v \in \mathcal{C}^2[0, \infty)$ es solución del problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(r^{N-1} \frac{dv}{dr}) = -r^{N-1} v^{\frac{N+2}{N-2}} & r > 0 \\ v(0) = u(0), \quad \frac{dv}{dr}(0) = 0. \end{cases} \quad (7.20)$$

Demostración: La demostración se obtiene fácilmente mediante un cálculo directo. ■

Teorema 7.12 La burbuja estándar

$$U(x) = a_N \left(\frac{1}{1 + |x|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}}, \quad a_N = (N(N-2))^{\frac{N-2}{4}},$$

es, salvo traslación, dilatación y signo, el único mínimo de J_∞ en $\mathcal{N}_\infty$.

Demostración: Sea $u \in \mathcal{N}_\infty$ un mínimo de J_∞ . Resultados de la regularidad aseguran que $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$. Sin perder generalidad, podemos suponer que u es positiva y radialmente simétrica respecto al origen.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea U_ε la ε -dilatación de U , es decir,

$$U_\varepsilon(x) = a_N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}}.$$

Escojamos ε de modo que $U_\varepsilon(0) = a_N \varepsilon^{\frac{2-N}{2}} = u(0)$. Un cálculo sencillo permite demostrar que la función

$$v(r) := a_N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + r^2} \right)^{\frac{N-2}{2}}$$

satisface (7.20). Así pues, dado que u y U_ε satisfacen (7.20) con las mismas condiciones iniciales, concluimos que $u = U_\varepsilon$. ■

7.4. El problema de Brezis-Nirenberg

Consideremos ahora el problema

$$(\wp_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2} u, \\ u \in D_0^{1,2}(\Omega), \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es abierto y acotado, $N \geq 3$, y $\lambda \in (-\lambda_1, \infty)$, donde $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ es el primer valor propio de $-\Delta$ en $D_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$.

Recuerda que, para $\lambda \in (-\lambda_1, \infty)$,

$$\|u\|_\lambda := \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) \right)^{1/2}$$

es una norma equivalente a la norma de $D_0^{1,2}(\Omega)$ (Proposición 3.21). Por tanto, las soluciones no triviales del problema $(\wp_\lambda)$ son los puntos críticos de la restricción del funcional

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2^*} |u|_{2^*}^{2^*}$$

a la variedad de Nehari

$$\mathcal{N}_\lambda := \{u \in D_0^{1,2}(\Omega) : u \neq 0, \|u\|_\lambda^2 = |u|_{2^*}^{2^*}\}.$$

Denotemos por

$$c_\lambda := \inf_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda = \frac{1}{N} S_\lambda^{N/2}, \quad S_\lambda := \inf_{\substack{u \in D_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^2}.$$

Demostramos que, si $\lambda = 0$, este ínfimo no se alcanza. Brezis y Nirenberg [12] probaron que, si $N \geq 4$ y $\lambda \in (-\lambda_1, 0)$, el ínfimo c_λ siempre se alcanza. El objetivo de esta sección es probar dicho resultado. Empezaremos demostrando el siguiente resultado.

Proposición 7.13 *Si $\lambda \in (-\lambda_1, 0]$ se tiene que*

- (a) $S_\lambda \leq S$.
- (b) Si $S_\lambda < S$, entonces J_λ alcanza su mínimo en $\mathcal{N}_\lambda$.

Demostración: (a) Observa que, para $\lambda \in (-\lambda_1, 0]$,

$$\|u\|_\lambda^2 = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + \lambda u^2) \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 = \|u\|^2 \quad \forall u \in D_0^{1,2}(\Omega).$$

En consecuencia, $S_\lambda \leq S$.

(b) Supongamos que $S_\lambda < S$. Sea (u_k) una sucesión en $D_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $|u_k|_{2^*} = 1$ y $\|u_k\|_\lambda^2 \rightarrow S_\lambda$. Como (u_k) está acotada en $D_0^{1,2}(\Omega)$ una subsucesión satisface

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u && \text{débilmente en } D_0^{1,2}(\Omega), \\ u_k &\rightarrow u && \text{fuertemente en } L^2(\Omega), \\ u_k(x) &\rightarrow u(x) && \text{c.d. en } \Omega, \end{aligned}$$

En particular, se cumple que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_\lambda^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|^2 + \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} |u_k - u|_2^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|^2.$$

Afirmamos que $u \neq 0$ pues, de lo contrario, la identidad anterior implica que

$$S_\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_\lambda^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|^2 \geq S$$

y, en consecuencia $S_\lambda = S$, lo que contradice nuestra hipótesis.

Aplicando los Lemas 6.32 y 6.34 y el Ejercicio 6.35 obtenemos que

$$\begin{aligned} S_\lambda &= S_\lambda \left(\lim_{k \rightarrow \infty} |u_k|_{2^*}^{2^*} \right)^{2/2^*} \\ &= S_\lambda \left(\lim_{k \rightarrow \infty} |u_k - u|_{2^*}^{2^*} + |u|_{2^*}^{2^*} \right)^{2/2^*} \\ &\leq S_\lambda \left(\lim_{k \rightarrow \infty} |u_k - u|_{2^*}^2 + |u|_{2^*}^2 \right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_\lambda^2 + \|u\|_\lambda^2 \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_\lambda^2 = S_\lambda. \end{aligned}$$

Como $u \neq 0$, concluimos (Ejercicio 6.35) que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |u_k - u|_{2^*}^{2^*} = 0.$$

Por tanto, $|u|_{2^*} = 1$ y, como $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$, se tiene que

$$S_\lambda \leq \frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^2} = \|u\|_\lambda^2 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_\lambda^2 = S_\lambda.$$

Es decir, $\frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^2} = S_\lambda$. ■

En virtud de la proposición anterior, para demostrar la existencia de una solución de energía mínima del problema $(\wp_\lambda)$ bastará probar que existe $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$ con $u \neq 0$ tal que $\frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^2} < S$. Usaremos como modelo a la burbuja estándar,

$$U_\varepsilon(x) = a_N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}}, \quad \varepsilon > 0.$$

Dado que ésta no tiene soporte en Ω procederemos a multiplicarla por una función de corte. Sin perder generalidad, podemos suponer que $0 \in \Omega$. Sea $R > 0$ tal que

$B_{2R}(0) \subset \Omega$. Fijemos una función $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leq R$ y $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq 2R$. Para cada $\varepsilon > 0$ consideremos la función

$$u_\varepsilon := \varphi U_\varepsilon. \quad (7.21)$$

Notación 7.14 Denotaremos por $O(\varepsilon^\alpha)$ a una función (que depende de ε) tal que existe una constante $C > 0$ (independiente de ε) que cumple

$$|\varepsilon^{-\alpha} O(\varepsilon^\alpha)| \leq C \quad \forall \varepsilon \text{ suficientemente pequeño.}$$

Lema 7.15 Se tienen las siguientes estimaciones:

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 = S^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2}), \quad (7.22)$$

$$\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{2^*} = S^{N/2} + O(\varepsilon^N), \quad (7.23)$$

$$\int_{\Omega} |u_\varepsilon|^2 \geq \begin{cases} C\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2}) & \text{si } N \geq 5, \\ C\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| + O(\varepsilon^2) & \text{si } N = 4. \end{cases} \quad (7.24)$$

Demostración: Como U_ε es solución de energía mínima del problema (φ_∞) , se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_\varepsilon|^2 = S^{N/2} = \int_{\mathbb{R}^N} |U_\varepsilon|^{2^*}.$$

Observa que

$$\nabla U_\varepsilon(x) = -a_N(N-2)\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^{N/2} x.$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi \nabla U_\varepsilon + (\nabla \varphi) U_\varepsilon|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2 |\nabla U_\varepsilon|^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \varphi U_\varepsilon (\nabla U_\varepsilon \cdot \nabla \varphi) + \int_{\mathbb{R}^N} |(\nabla \varphi)|^2 U_\varepsilon^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_\varepsilon|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \varphi^2) |\nabla U_\varepsilon|^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \varphi U_\varepsilon (\nabla U_\varepsilon \cdot \nabla \varphi) + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 U_\varepsilon^2 \\ &= S^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2}), \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \varphi^2) |\nabla U_\varepsilon|^2 &= C\varepsilon^{N-2} \int_{|x| > R} (1 - \varphi^2) \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^N |x|^2 dx \\ &\leq C\varepsilon^{N-2} \int_{|x| > R} |x|^{-2N+2} dx < \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi U_\varepsilon (\nabla U_\varepsilon \cdot \nabla \varphi) &= C\varepsilon^{N-2} \int_{R < |x| < 2R} \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^{N-1} (x \cdot \nabla \varphi) \, dx \\ &\leq C\varepsilon^{N-2} \int_{R < |x| < 2R} |x|^{-2N+3} \, dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 U_\varepsilon^2 &= C\varepsilon^{N-2} \int_{R < |x| < 2R} |\nabla \varphi|^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^{N-2} \, dx \\ &\leq C\varepsilon^{N-2} \int_{R < |x| < 2R} |x|^{-2N+4} \, dx, \end{aligned}$$

donde C denota a distintas constantes positivas. Esto prueba (7.22).

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{2^*} &= \int_{\mathbb{R}^N} |U_\varepsilon|^{2^*} - \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \varphi^{2^*}) |U_\varepsilon|^{2^*} \\ &= S^{N/2} + O(\varepsilon^N), \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \varphi^{2^*}) |U_\varepsilon|^{2^*} &= C\varepsilon^N \int_{|x| > R} (1 - \varphi^{2^*}) \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^N \, dx \\ &\leq C\varepsilon^N \int_{|x| > R} |x|^{-2N} \, dx. \end{aligned}$$

Esto demuestra (7.23).

Finalmente,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^2 &= \int_{|x| \leq R} U_\varepsilon^2 + \int_{R \leq |x| \leq 2R} u_\varepsilon^2 \\ &\geq \int_{|x| \leq R} U_\varepsilon^2 = \int_{|x| \leq \varepsilon} U_\varepsilon^2 + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} U_\varepsilon^2 \\ &\geq C \left[\int_{|x| \leq \varepsilon} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \right)^{N-2} \, dx + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \left(\frac{\varepsilon}{2|x|^2} \right)^{N-2} \, dx \right] \\ &= C\varepsilon^2 + C\varepsilon^{N-2} \int_{\varepsilon}^R r^{-N+3} \, dr \end{aligned}$$

y, dado que

$$\int_{\varepsilon}^R r^{-N+3} \, dr = \begin{cases} \frac{-1}{N-4} (R^{-N+4} - \varepsilon^{-N+4}) & \text{si } N \geq 5, \\ \ln R - \ln \varepsilon & \text{si } N = 4, \end{cases}$$

concluimos que

$$\int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^2 \geq \begin{cases} C\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2}) & \text{si } N \geq 5, \\ C\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| + O(\varepsilon^2) & \text{si } N = 4. \end{cases}$$

Esta es justamente la estimación (7.24). ■

Teorema 7.16 (Brezis-Nirenberg 1983) *Si $N \geq 4$ y $\lambda \in (-\lambda_1, 0)$ entonces el problema (??) tiene una solución de energía mínima.*

Demostración: Por la Proposición 7.13 basta probar que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña, se cumple que

$$\frac{\|u_{\varepsilon}\|_{\lambda}^2}{|u_{\varepsilon}|_{2^*}^2} < S,$$

donde u_{ε} es la función definida en (7.21). En lo sucesivo C, C_i denotan constantes positivas.

Consideremos primero el caso $N \geq 5$. Como $\lambda < 0$, se sigue de (7.22), (7.23) y (7.24) que

$$\begin{aligned} \|u_{\varepsilon}\|_{\lambda}^2 &\leq S^{N/2} + \lambda C\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2}), \\ |u_{\varepsilon}|_{2^*}^2 &= (S^{N/2} + O(\varepsilon^N))^{2/2^*} \geq (S^{N/2} - C_1\varepsilon^N)^{2/2^*} \geq C_2 \end{aligned}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña. Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\|u_{\varepsilon}\|_{\lambda}^2}{|u_{\varepsilon}|_{2^*}^2} &\leq \frac{S^{N/2} + \lambda C\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2})}{(S^{N/2} - C_1\varepsilon^N)^{2/2^*}} \\ &= \frac{S^{N/2} - C_1\varepsilon^N + \lambda C\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2})}{(S^{N/2} - C_1\varepsilon^N)^{2/2^*}} \\ &= (S^{N/2} - C_1\varepsilon^N)^{2/N} + \frac{\lambda C\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2})}{C_2} \\ &\leq S + (\lambda C_3 + C_4\varepsilon^{N-4})\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Como $\lambda < 0$ y $N \geq 5$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña se tiene que $\lambda C_3 + C_4\varepsilon^{N-4} < 0$. Por tanto,

$$\frac{\|u_{\varepsilon}\|_{\lambda}^2}{|u_{\varepsilon}|_{2^*}^2} < S,$$

como queríamos probar.

Si $N = 4$, argumentando como antes obtenemos que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña,

$$\begin{aligned} \frac{\|u_\varepsilon\|_\lambda^2}{|u_\varepsilon|_{2^*}^2} &\leq \frac{S^2 + \lambda C \varepsilon^2 |\ln \varepsilon| + O(\varepsilon^2)}{(S^2 - C_1 \varepsilon^4)^{2/2^*}} \\ &= S + (\lambda C_3 |\ln \varepsilon| + C_4) \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Como $\lambda C_3 |\ln \varepsilon| + C_4 < 0$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña, concluimos que

$$\frac{\|u_\varepsilon\|_\lambda^2}{|u_\varepsilon|_{2^*}^2} < S.$$

Esto concluye la demostración. ■

7.5. Representación de sucesiones de Palais-Smale

Probaremos el siguiente resultado.

Teorema 7.17 *Sea (u_k) una sucesión en $D_0^{1,2}(\Omega)$ tal que*

$$J_\lambda(u_k) \rightarrow c \quad \text{y} \quad \nabla J_\lambda(u_k) \rightarrow 0.$$

Entonces, pasando a una subsucesión, existen una solución (posiblemente trivial) u del problema $(\wp_\lambda)$, m sucesiones $(\zeta_{1,k}), \dots, (\zeta_{m,k})$ en Ω , m sucesiones $(\varepsilon_{1,k}), \dots, (\varepsilon_{m,k})$ en $(0, \infty)$, y m soluciones no triviales $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_m$ del problema $(\wp_\infty)$, con las siguientes propiedades:

- (i) $\varepsilon_{i,k}^{-1} \text{dist}(\zeta_{i,k}, \partial\Omega) \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$;
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| u_k - u - \sum_{i=1}^m \varepsilon_{i,k}^{\frac{2-k}{2}} \hat{u}_i \left(\frac{\cdot - \zeta_{i,k}}{\varepsilon_{i,k}} \right) \right\| = 0$;
- (iii) $J_\lambda(u) + \sum_{i=1}^m J_\infty(\hat{u}_i) = c$.

Antes de demostrar el teorema anterior, demostremos una consecuencia importante de él.

Corolario 7.18 *El funcional $J_* : \mathcal{N}_* \rightarrow \mathbb{R}$ satisface la condición de Palais-Smale en $(c_*, 2c_*)$.*

Demostración: ■

Lema 7.19 Sea (u_k) una sucesión en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ con $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Entonces

$$|u_k|^{2^*-2} u_k - |u_k - u|^{2^*-2} (u_k - u) \longrightarrow |u|^{2^*-2} u \quad \text{en } (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))',$$

es decir,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_k|^{2^*-2} u_k v - |u_k - u|^{2^*-2} (u_k - u) v - |u|^{2^*-2} uv \right) \right| \leq o(1) \|v\|$$

para todo $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, donde $o(1)$ denota a una función que tiende a 0 cuando $k \rightarrow \infty$.

Demostración: Denotemos por $h(v) := |v|^{2^*-2} v$. Aplicando el teorema del valor medio a la función $t \mapsto h(v - tu)$ obtenemos que existe $t \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} |h(v) - h(v - u) - h(u)| &\leq |h(v) - h(v - u)| + |h(u)| \\ &= (2^* - 1) |v - tu|^{2^*-2} |u| + |u|^{2^*-2} |u| \\ &\leq (2^* - 1) (|v| + |u|)^{2^*-2} |u| + |u|^{2^*-2} |u| \\ &\leq C \left(|v|^{2^*-2} + |u|^{2^*-2} \right) |u|. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Aquí, y en lo sucesivo, C denota a una constante positiva, no necesariamente la misma. Sea $\varepsilon > 0$. Aplicando las desigualdades de Hölder y Sobolev, se tiene que

$$\begin{aligned} &\left| \int_{|x| \geq R} (h(u_k)v - h(u_k - u)v - h(u)v) \right| \\ &\leq \int_{|x| \geq R} |h(u_k) - h(u_k - u)| |v| + \int_{|x| \geq R} |h(u)| |v| \\ &\leq C \int_{|x| \geq R} \left(|u_k|^{2^*-2} + |u|^{2^*-2} \right) |u| |v| \\ &\leq C \left(|u_k|_{2^*}^{2^*-2} + |u|_{2^*}^{2^*-2} \right) \left(\int_{|x| \geq R} |u| \right) |v|_{2^*} \\ &\leq C \left(\int_{|x| \geq R} |u| \right) \|v\| < \frac{\varepsilon}{2} \|v\| \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \quad (7.26)$$

para algún $R > 0$ suficientemente grande.

Sea $M := \max_{|x| \leq R} |u(x)|$. De la desigualdad (7.25) se sigue que

$$\begin{aligned} |h(v) - h(v - u) - h(u)| &\leq C \left(|v|^{2^*-2} + M^{2^*-2} \right) M \\ &\leq C \left(|v|^{2^*-2} + 1 \right). \end{aligned}$$

Así que, tomando $p := \frac{4}{5}2^*$, la Proposición asegura que el operador de Nemytskii

$$L^p(B_r(0)) \rightarrow L^{2N/5}(B_r(0)), \quad v \mapsto h(v) - h(v - u) - h(u),$$

es continuo. Como $p \in [1, 2^*)$, el teorema de Rellich-Kondrashov asegura que $u_k \rightarrow u$ fuertemente en $L^p(B_r(0))$ y, en consecuencia, $h(u_k) - h(u_k - u) - h(u) \rightarrow 0$ en $L^{2N/5}(B_r(0))$. Aplicando de nuevo las desigualdades de Hölder y Sobolev se tiene que, para k suficientemente grande,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{|x| \leq R} (h(u_k)v - h(u_k - u)v - h(u)v) \right| \\ &\leq |h(u_k) - h(u_k - u) - h(u)|_{2N/5} |v|_{2N/(2N-5)} \\ &\leq C |h(u_k) - h(u_k - u) - h(u)|_{2N/5} \|v\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \|v\| \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \tag{7.27}$$

De las desigualdades (7.26) y (7.27) se sigue que, para k suficientemente grande,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (h(u_k)v - h(u_k - u)v - h(u)v) \right| < \varepsilon \|v\| \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

como afirma el enunciado. ■

Como antes, denotamos a J_0 , la energía del problema $(\wp_0)$, por J_* .

Proposición 7.20 *Sea (v_k) una sucesión en $D_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $v_k \rightharpoonup 0$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$,*

$$J_*(v_k) \rightarrow c > 0 \quad y \quad \nabla J_*(v_k) \rightarrow 0.$$

Entonces, pasando a una subsucesión, existen una sucesión (ζ_k) en Ω , una sucesión (ε_k) en $(0, \infty)$, una solución no trivial ω del problema $(\wp_\infty)$ y una sucesión $(\tilde{v}_k)$ en $D_0^{1,2}(\Omega)$ con las siguientes propiedades:

$$(i) \quad \varepsilon_k^{-1} \text{dist}(\zeta_k, \partial\Omega) \rightarrow \infty \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty;$$

$$(ii) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| v_k - \tilde{v}_k - \varepsilon_k^{\frac{2-N}{2}} \omega \left(\frac{\cdot - \zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \right\| = 0;$$

(iii) $\tilde{v}_k \rightharpoonup 0$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$, $J_*(\tilde{v}_k) \rightarrow c - J_\infty(\omega)$ y $\nabla J_*(\tilde{v}_k) \rightarrow 0$.

Demostración: Copiando la demostración del Teorema 7.9 a partir del Paso 2 y hasta el Paso 5, reemplazando únicamente a c_* por c , concluimos que existen sucesiones (ζ_k) en $\mathbb{R}^N$ y (ε_k) en $(0, \infty)$ tales que, si definimos $w_k(z) := \varepsilon_k^{\frac{N-2}{2}} v_k(\varepsilon_k z + \zeta_k)$, entonces

$$w_k \rightharpoonup \omega \neq 0 \quad \text{débilmente en } D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

y se cumple que, o bien $\varepsilon_k^{-1} \text{dist}(\zeta_k, \partial\Omega) \rightarrow d \in [0, \infty)$ y ω es solución del problema

$$-\Delta u = |u|^{2^*-2}u, \quad u \in D_0^{1,2}(\mathbb{H})$$

en un semiespacio $\mathbb{H}$ de $\mathbb{R}^N$, o bien $\varepsilon_k^{-1} \text{dist}(\zeta_k, \partial\Omega) \rightarrow \infty$, $\zeta_k \in \Omega$, y ω es solución del problema

$$(\wp_\infty) \quad -\Delta u = |u|^{2^*-2}u, \quad u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Pero la primera opción es imposible, ya que el problema no tiene solución no trivial en $\mathbb{H}$ (Tarea 10). Así que la segunda opción es la que, necesariamente, se cumple.

Vamos ahora a definir la sucesión $\tilde{v}_k$. Elegimos una función $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ tal que $0 \leq \chi(x) \leq 1$, $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ y $\chi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$, y definimos

$$\tilde{v}_k(x) := v_k(x) - \varepsilon_k^{\frac{2-N}{2}} \omega \left(\frac{x - \zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \chi \left(\frac{x - \zeta_k}{r_k} \right), \quad \text{con } r_k := \frac{1}{2} \text{dist}(\zeta_k, \partial\Omega).$$

Entonces, si denotamos por $\psi_k(z) := 1 - \chi \left(\frac{\varepsilon_k z}{r_k} \right)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| v_k - \tilde{v}_k - \varepsilon_k^{\frac{2-N}{2}} \omega \left(\frac{\cdot - \zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \right\|^2 &= \left\| \varepsilon_k^{\frac{2-N}{2}} \omega \left(\frac{\cdot - \zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \left[1 - \chi \left(\frac{\cdot - \zeta_k}{r_k} \right) \right] \right\|^2 \\ &= \|\omega \psi_k\|^2 \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} \psi_k^2 |\nabla \omega|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \omega^2 |\nabla \psi_k|^2 \right) \\ &\leq C \left(\int_{|z| \geq \frac{r_k}{\varepsilon_k}} |\nabla \omega|^2 + \left(\frac{\varepsilon_k}{r_k} \right)^2 \int_{\frac{r_k}{\varepsilon_k} \leq |z| \leq \frac{2r_k}{\varepsilon_k}} \omega^2 \right) \end{aligned} \quad (7.28)$$

donde, aquí y en lo sucesivo, C denota a una constante positiva, no necesariamente la misma. (Observa que ω no está en $L^2(\mathbb{R}^N)$, pero sí está en $L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$). Como $\frac{r_k}{\varepsilon_k} = \frac{1}{2} \varepsilon_k^{-1} \text{dist}(\zeta_k, \partial\Omega) \rightarrow \infty$ y $\omega \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ se tiene que

$$\int_{|z| \geq \frac{r_k}{\varepsilon_k}} |\nabla \omega|^2 \rightarrow 0. \quad (7.29)$$

Por otra parte, usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varepsilon_k}{r_k}\right)^2 \int_{\frac{r_k}{\varepsilon_k} \leq |z| \leq \frac{2r_k}{\varepsilon_k}} \omega^2 &\leq \left(\frac{\varepsilon_k}{r_k}\right)^2 \left[C \left(\frac{r_k}{\varepsilon_k}\right)^N \right]^{(2^*-2)/2^*} \left(\int_{\frac{r_k}{\varepsilon_k} \leq |z| \leq \frac{2r_k}{\varepsilon_k}} \omega^{2^*} \right)^{2/2^*} \\ &\leq C \left(\int_{|z| \geq \frac{r_k}{\varepsilon_k}} \omega^{2^*} \right)^{2/2^*} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (7.30)$$

La afirmación (ii) se sigue de (7.28), (7.29) y (7.30).

Puesto que $v_k \rightharpoonup 0$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$, de la definición de $\tilde{v}_k$ se sigue inmediatamente que $\tilde{v}_k \rightharpoonup 0$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$. Por otra parte, como $w_k \rightharpoonup \omega$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, usando (ii) obtenemos

$$\begin{aligned} \|v_k\|^2 &= \|w_k\|^2 = \|w_k - \omega\|^2 + \|\omega\|^2 + o(1) \\ &= \left\| v_k - \varepsilon_k^{\frac{2-k}{2}} \omega \left(\frac{\cdot - \zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \right\|^2 + \|\omega\|^2 + o(1) \\ &= \|\tilde{v}_k\|^2 + \|\omega\|^2 + o(1), \end{aligned}$$

donde $o(1)$ denota a una función que tiende a 0 cuando $k \rightarrow \infty$. Análogamente, usando el lema de Brezis-Lieb, la afirmación (ii) y la desigualdad de Sobolev, obtenemos

$$\begin{aligned} |v_k|_{2^*}^{2^*} &= |w_k|_{2^*}^{2^*} = |w_k - \omega|_{2^*}^{2^*} + |\omega|_{2^*}^{2^*} + o(1) \\ &= \left| v_k - \varepsilon_k^{\frac{2-k}{2}} \omega \left(\frac{\cdot - \zeta_k}{\varepsilon_k} \right) \right|_{2^*}^{2^*} + |\omega|_{2^*}^{2^*} + o(1) \\ &= |\tilde{v}_k|_{2^*}^{2^*} + |\omega|_{2^*}^{2^*} + o(1). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$c = \lim_{k \rightarrow \infty} J_*(v_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} J_*(\tilde{v}_k) + J_\infty(\omega).$$

Un argumento análogo, usando el Lema 7.19, demuestra que

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla J_*(v_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla J_*(\tilde{v}_k) + \nabla J_\infty(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla J_*(\tilde{v}_k).$$

Esto concluye la demostración. ■

Demostración del Teorema 7.17: Observa primero que, si (u_k) es una sucesión en $D_0^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$J_\lambda(u_k) \rightarrow c \quad \text{y} \quad \nabla J_\lambda(u_k) \rightarrow 0,$$

entonces, como

$$\frac{2}{N-2} \|u_k\|_\lambda^2 = 2^* J_\lambda(u_k) - J'_\lambda(u_k)u_k \leq C + o(1) \|u_k\|_\lambda,$$

se tiene que (u_k) está acotada en $D_0^{1,2}(\Omega)$. En consecuencia, $c \geq 0$. Si $c = 0$ entonces $u_k \rightarrow 0$ fuertemente en $D_0^{1,2}(\Omega)$ y la afirmación del teorema se cumple. Si $c \neq 0$, pasando a una subsucesión, se tiene que $u_n \rightarrow u$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$, $u_n \rightarrow u$ fuertemente en $L^2(\Omega)$, y $u_n \rightarrow u$ c.d. en Ω . Usando el Lema 7.7 obtenemos que, para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u_k)\varphi &= \int_\Omega (\nabla u_k \cdot \nabla \varphi + \lambda u_k \varphi) - \int_\Omega |u_k|^{2^*-2} u_k \varphi \\ &\longrightarrow \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi + \lambda u \varphi) - \int_\Omega |u|^{2^*-2} u \varphi = J'_\lambda(u)\varphi \end{aligned}$$

y, como $J'_\lambda(u_k)\varphi \rightarrow 0$, se tiene que u es solución de $(\wp_\lambda)$.

Definimos $v_k^1 := u_k - u$. Como $v_k^1 \rightarrow 0$ fuertemente en $L^2(\Omega)$,

$$\|u_k\|_\lambda^2 = \|v_k^1\|^2 + \|u\|_\lambda^2 + o(1),$$

y usando el lema de Brezis-Lieb obtenemos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_k) &= \frac{1}{2} \|u_k\|_\lambda^2 - \frac{1}{2^*} |u_k|_{2^*}^{2^*} \\ &= \frac{1}{2} \|v_k^1\|^2 - \frac{1}{2^*} |v_k^1|_{2^*}^{2^*} + \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2^*} |u|_{2^*}^{2^*} + o(1) \\ &= J_*(v_k^1) + J_\lambda(u) + o(1). \end{aligned}$$

De modo que,

$$J_*(v_k^1) \rightarrow c - J_\lambda(u) =: c^1.$$

Del Lema 7.19 se sigue además que

$$\begin{aligned} o(1) &= |u_k|^{2^*-2} u_k - |u_k - u|^{2^*-2} (u_k - u) - |u|^{2^*-2} u \\ &= J'_\lambda(u_k) - J'_*(v_k^1) - J'_\lambda(u) + o(1) \\ &= -J'_*(v_k^1) + o(1) \quad \text{en } (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))', \end{aligned}$$

es decir,

$$\nabla J_*(v_k^1) \rightarrow 0.$$

Si $c^1 = 0$, entonces

$$\frac{2}{N-2} \|v_k^1\|^2 = 2^* J(v_k^1) - J'(v_k^1)v_k^1 = o(1),$$

es decir, $u_k \rightarrow u$ fuertemente en $D_0^{1,2}(\Omega)$ y la demostración termina. Si, por el contrario, $c^1 \neq 0$, aplicamos la Proposición 7.20 a (v_k^1) . La conclusión del teorema se obtiene aplicando esta proposición un número finito de veces. ■

7.6. El problema de Bahri-Coron

7.6.1. El baricentro

Definición 7.21 Si Ω es un dominio acotado y $u \in L^{2^*}(\Omega) \setminus \{0\}$, definimos el bari-centro de u como

$$\beta(u) := \frac{\int_{\Omega} x |u(x)|^{2^*} dx}{|u|_{2^*}^{2^*}},$$

donde

$$\int_{\Omega} x |u(x)|^{2^*} dx := \left(\int_{\Omega} x_1 |u(x)|^{2^*} dx, \dots, \int_{\Omega} x_N |u(x)|^{2^*} dx \right) \in \mathbb{R}^N.$$

Observa que, como Ω es acotado, las proyecciones $x_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ están en $L^\infty(\Omega)$, así que las integrales son finitas.

Lema 7.22 Sean Ω un dominio acotado y $u \in L^{2^*}(\Omega) \setminus \{0\}$.

(a) Si $\zeta \in \mathbb{R}^N$ y $u_\zeta \in L^{2^*}(\Omega_\zeta) \setminus \{0\}$ es la función $u_\zeta(z) := u(z - \zeta)$, donde $U_\zeta := \{z \in \mathbb{R}^N : z - \zeta \in \Omega\}$, entonces

$$\beta(u_\zeta) = \beta(u) + \zeta.$$

(b) Si Ω satisface que $x \in \Omega$ si y sólo si $-x \in \Omega$, y $u(x) = u(-x)$ para todo $x \in \Omega$, entonces $\beta(u) = 0$.

(c) $\beta(tu) = \beta(u)$ para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Demostración: (a) Haciendo el cambio de variable $x = z - \zeta$ obtenemos

$$\beta(u_\zeta) = \frac{\int_{\Omega_\zeta} z |u(z - \zeta)|^{2^*} dz}{|u_\zeta|_{2^*}^{2^*}} = \frac{\int_{\Omega} (x + \zeta) |u(x)|^{2^*} dx}{|u|_{2^*}^{2^*}} = \beta(u) + \zeta.$$

(b) Haciendo el cambio de variable $x = -y$ obtenemos

$$\beta(u) = \frac{\int_{\Omega} x |u(x)|^{2^*} dx}{|u|_{2^*}^{2^*}} = \frac{-\int_{\Omega} y |u(y)|^{2^*} dy}{|u|_{2^*}^{2^*}} = -\beta(u).$$

En consecuencia, $\beta(u) = 0$.
(c) es inmediata. ■

Lema 7.23 *La función baricentro $\beta : L^{2^*}(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^N$ es continua.*

Demostración: Sean $u_k, u \in L^{2^*}(\Omega) \setminus \{0\}$ tales que $u_k \rightarrow u$ en $L^{2^*}(\Omega)$. Entonces existe $g \in L^{2^*}(\Omega)$ tal que, pasando a una subsucesión,

$$u_k(x) \rightarrow u(x) \quad \text{y} \quad |u_k(x)| \leq g(x) \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega;$$

ver [14, Teorema 14.28]. Por el teorema de convergencia dominada se tiene que

$$\left| \int_{\Omega} x_i \left(|u_k(x)|^{2^*} - |u(x)|^{2^*} \right) dx \right| \leq C \int_{\Omega} \left| |u_k(x)|^{2^*} - |u(x)|^{2^*} \right| dx = o(1).$$

En consecuencia,

$$\beta(u_k) = \frac{\int_{\Omega} x |u_k(x)|^{2^*} dx}{|u_k|_{2^*}^{2^*}} \longrightarrow \frac{\int_{\Omega} x |u(x)|^{2^*} dx}{|u|_{2^*}^{2^*}} = \beta(u).$$

Esto prueba que β es continua. ■

Como antes, denotamos por

$$J_*(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2^*} |u|_{2^*}^{2^*},$$

$$\mathcal{N}_* := \{u \in D_0^{1,2}(\Omega) : u \neq 0, \|u\|^2 = |u|_{2^*}^{2^*}\},$$

$$c_* := \inf_{\mathcal{N}_*} J_*.$$

Proposición 7.24 *La función baricentro $\beta : \mathcal{N}_* \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y, dada $d > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\text{dist}(\beta(u), \Omega) < d \quad \forall u \in \mathcal{N}_* \text{ con } J_*(u) < c_* + \delta.$$

Demostración: La primera afirmación es consecuencia del lema anterior y la desigualdad de Sobolev.

Para probar la segunda afirmación, argumentando por contradicción, supongamos que existen $d_0 > 0$ y $v_k \in \mathcal{N}_*$ con $J_*(v_k) < c_* + \frac{1}{k}$ tal que

$$\text{dist}(\beta(v_k), \Omega) \geq d_0. \tag{7.31}$$

Por el principio variacional de Ekeland, podemos suponer sin perder generalidad que $\nabla J_*(v_k) \rightarrow 0$. Como, salvo dilataciones y traslaciones, la burbuja estándar es la única solución de energía mínima del problema $(\wp_\infty)$, el Teorema 7.17 asegura que existen sucesiones (ζ_k) en Ω y (ε_k) en $(0, \infty)$ tales que $\varepsilon_k \rightarrow 0$ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - U_{\varepsilon_k, \zeta_k}\| = 0, \quad (7.32)$$

donde

$$U_{\varepsilon_k, \zeta_k}(x) = a_N \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_k^2 + |x - \zeta_k|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}}.$$

Elegimos $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ y $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$, y definimos

$$u_k(x) := \varphi(x - \zeta_k) U_{\varepsilon_k, \zeta_k}(x).$$

El soporte de esta función está contenido en $\widehat{\Omega} := \{z \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(z, \Omega) \leq 2\}$, que es acotado, así que $\beta(u_k)$ está bien definido, y del Lema 7.22 se sigue que $\beta(u_k) = \zeta_k$. Observa además que, como $\varepsilon_k \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} |U_{\varepsilon_k, \zeta_k} - u_k|_{2^*}^{2^*} &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \varphi)^{2^*} |U_{\varepsilon_k}|^{2^*} = a_N \varepsilon_k^N \int_{|x| > 1} (1 - \varphi)^{2^*} \left(\frac{1}{\varepsilon_k^2 + |x|^2} \right)^N dx \\ &\leq C \varepsilon_k^N \int_{|x| > 1} |x|^{-2N} dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Así que

$$|u_k|_{2^*}^{2^*} = S^{N/2} + o(1) = |v_k|_{2^*}^{2^*}, \quad (7.33)$$

y de (7.32) se sigue que

$$|u_k - v_k|_{2^*}^{2^*} \rightarrow 0.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} |\beta(v_k) - \beta(u_k)| &= \left| \frac{\int_{\Omega} x |v_k(x)|^{2^*} dx}{|v_k|_{2^*}^{2^*}} - \frac{\int_{\widehat{\Omega}} x |u_k(x)|^{2^*} dx}{|u_k|_{2^*}^{2^*}} \right| \\ &\leq \left| \frac{\int_{\widehat{\Omega}} x (|v_k(x)|^{2^*} - |u_k(x)|^{2^*}) dx}{|v_k|_{2^*}^{2^*}} \right| + \left| \frac{(|u_k|_{2^*}^{2^*} - |v_k|_{2^*}^{2^*}) \int_{\widehat{\Omega}} x |u_k(x)|^{2^*} dx}{|v_k|_{2^*}^{2^*} |u_k|_{2^*}^{2^*}} \right| \\ &= \left| \frac{\int_{\widehat{\Omega}} x (|v_k(x)|^{2^*} - |u_k(x)|^{2^*}) dx}{|v_k|_{2^*}^{2^*}} \right| + \left| \frac{|u_k|_{2^*}^{2^*} - |v_k|_{2^*}^{2^*}}{|v_k|_{2^*}^{2^*}} \beta(u_k) \right|. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Como $\beta(u_k) = \zeta_k$ y (ζ_k) está acotada, se sigue de (7.33) que

$$\left| \frac{|u_k|_{2^*}^{2^*} - |v_k|_{2^*}^{2^*}}{|v_k|_{2^*}^{2^*}} \beta(u_k) \right| \rightarrow 0. \quad (7.35)$$

El Lema 6.33 asegura que, dada $\eta > 0$ existe $C_\eta > 0$ tal que

$$\left| |b|^{2^*} - |a|^{2^*} \right| \leq \eta |a|^{2^*} + C_\eta |b - a|^{2^*} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

De modo que

$$\int_{\hat{\Omega}} \left| |v_k(x)|^{2^*} - |u_k(x)|^{2^*} \right| dx \leq \eta |v_k|_{2^*}^{2^*} + C_\eta |u_k - v_k|_{2^*}^{2^*} \leq (S^{N/2} + 1)\eta$$

para k suficientemente grande. En consecuencia,

$$\left| \frac{\int_{\hat{\Omega}} x \left(|v_k(x)|^{2^*} - |u_k(x)|^{2^*} \right) dx}{|v_k|_{2^*}^{2^*}} \right| \rightarrow 0. \quad (7.36)$$

De (7.34), (7.35) y (7.36) se sigue que

$$\text{dist}(\beta(v_k), \Omega) \leq |\beta(v_k) - \zeta_k| = |\beta(v_k) - \beta(u_k)| \rightarrow 0,$$

lo que contradice a (7.31). ■

7.6.2. Soluciones en dominios anulares

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente resultado.

Teorema 7.25 (Coron, 1984) *Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, tal que $a, b \in (0, \infty)$ tales que*

$$0 \notin \Omega \quad y \quad \Omega \supset \{x \in \mathbb{R}^N : a < |x| < b\}$$

con $a, b \in (0, \infty)$. Si $\frac{a}{b}$ es suficientemente grande entonces el problema

$$(\mathcal{P}_*) \quad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2} u, \\ u \in D_0^{1,2}(\Omega), \end{cases}$$

tiene una solución positiva.

El problema $(\wp_*)$ en Ω es equivalente al problema $(\wp_*)$ en $\lambda\Omega := \{z \in \mathbb{R}^N : \frac{z}{\lambda} \in \Omega\}$, es decir, u es solución de $(\wp_*)$ en Ω si y sólo si $\lambda^{\frac{2-N}{2}} u(\frac{\cdot}{\lambda})$ es solución de $(\wp_*)$ en $\lambda\Omega$. Así que, tomando $\lambda^2 = ab$, podemos suponer sin perder generalidad que

$$0 \notin \Omega \quad \text{y} \quad \Omega \supset \{x \in \mathbb{R}^N : \frac{1}{4R} < |x| < 4R\} =: A_R.$$

con $R \in (0, \infty)$.

Elegimos $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi(x) = 1$ si $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2$ y $\varphi(x) = 0$ si $|x| \leq \frac{1}{4}$ o $|x| \geq 4$. Dado $R \in (0, \infty)$, definimos

$$\varphi_R(x) := \begin{cases} \varphi(Rx) & \text{si } 0 \leq |x| \leq \frac{1}{R}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{R} \leq |x| \leq R, \\ \varphi(\frac{x}{R}) & \text{si } R \leq |x|. \end{cases}$$

Nota que

$$\begin{aligned} \varphi_R(x) &= 0 & \text{si } 0 \leq |x| \leq \frac{1}{4R} \text{ o } |x| \geq 4R, \\ \varphi_R(x) &= 1 & \text{si } \frac{1}{2R} \leq |x| \leq 2R. \end{aligned}$$

Para $r \in [0, 1)$ y $\zeta \in \mathbb{S}^N := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$, definimos

$$u_{r,\zeta}^R(x) := \varphi_R(x) U_{1-r,r\zeta}(x),$$

donde

$$U_{1-r,r\zeta}(x) = a_N \left(\frac{1-r}{|1-r|^2 + |x-r\zeta|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}},$$

es la burbuja estándar. Nota que $\text{sop}(u_{r,\zeta}^R) \subset A_R$.

Lema 7.26 $\lim_{R \rightarrow \infty} \|u_{r,\zeta}^R - U_{1-r,r\zeta}\| = 0$, uniformemente en $r \in [0, 1)$ y $\zeta \in \mathbb{S}^N$.

Demostración: En lo sucesivo, C denota a alguna constante positiva, no necesariamente la misma.

$$\begin{aligned} \|u_{r,\zeta}^R - U_{1-r,r\zeta}\|^2 &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \varphi_R)^2 |\nabla U_{1-r,r\zeta}|^2 + C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_R|^2 U_{1-r,r\zeta}^2 \\ &\leq C \int_{|x| \leq \frac{1}{4R}} |\nabla U_{1-r,r\zeta}|^2 + C \int_{|x| \geq 4R} |\nabla U_{1-r,r\zeta}|^2 \\ &\quad + CR^2 \int_{\frac{1}{4R} \leq |x| \leq \frac{1}{2R}} U_{1-r,r\zeta}^2 + C \frac{1}{R^2} \int_{2R \leq |x| \leq 4R} U_{1-r,r\zeta}^2. \end{aligned}$$

Un cálculo sencillo prueba que cada una de las últimas cuatro integrales tiende a 0 cuando $R \rightarrow \infty$, uniformemente en $r \in [0, 1)$ y $\zeta \in \mathbb{S}^N$. TAREA. ■

Corolario 7.27 *Dado $c \in (c_*, 2c_*)$ existe $R \in (0, \infty)$ tal que $u_{r,\zeta}(x) := u_{r,\zeta}^R(x)$ satisface*

$$\frac{\|u_{r,\zeta}\|^2}{|u_{r,\zeta}|_{2^*}^2} \leq (Nc)^{2/N} < 2^{2/N}S \quad \forall r \in [0, 1), \quad \forall \zeta \in \mathbb{S}^N.$$

Demostración: Observa que $c \in (c_*, 2c_*)$ si y sólo si $\hat{c} := (Nc)^{2/N} \in (S, 2^{2/N}S)$. Por el lema anterior, para R suficientemente grande,

$$\frac{\|u_{r,\zeta}^R\|^2}{|u_{r,\zeta}^R|_{2^*}^2} \leq \frac{(\|U_{1-r,r\zeta}\| + \|u_{r,\zeta}^R - U_{1-r,r\zeta}\|)^2}{(|U_{1-r,r\zeta}|_{2^*} - |u_{r,\zeta}^R - U_{1-r,r\zeta}|_{2^*})^2} = \frac{\|U_{1-r,r\zeta}\|^2}{|U_{1-r,r\zeta}|_{2^*}^2} + (\hat{c} - S) = \hat{c},$$

para cualesquiera $r \in [0, 1)$, $\zeta \in \mathbb{S}^N$. ■

Lema 7.28 *Se cumple que*

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\|u_{r,\zeta}\|^2}{|u_{r,\zeta}|_{2^*}^2} = S \quad y \quad \lim_{r \rightarrow 1} \beta(u_{r,\zeta}) = \zeta, \quad \text{uniformemente en } \zeta \in \mathbb{S}^N.$$

Demostración: TAREA. ■

Demostración del Teorema 7.25: Fijemos $c \in (c_*, 2c_*)$ y definamos $u_{r,\zeta}(x)$ como en el Corolario 7.27. Sea $t_{r,\zeta} \in (0, \infty)$ tal que $v_{r,\zeta} := t_{r,\zeta}u_{r,\zeta} \in \mathcal{N}_*$. Entonces

$$t_{r,\zeta} := \left(\frac{\|u_{r,\zeta}\|^2}{|u_{r,\zeta}|_{2^*}^2} \right)^{\frac{1}{2^*-2}} \quad y \quad J_*(v_{r,\zeta}) = \frac{1}{N} \left(\frac{\|u_{r,\zeta}\|^2}{|u_{r,\zeta}|_{2^*}^2} \right)^{N/2} \leq c.$$

Para $d := \text{dist}(0, \Omega)$ elegimos $\delta \in (0, c - c_*)$ como en la Proposición 7.24, es decir,

$$\text{dist}(\beta(u), \Omega) < d \quad \forall u \in \mathcal{N}_* \text{ con } J_*(u) \leq c_* + \delta. \quad (7.37)$$

De los Lemas 7.28 y 7.22(c) se sigue que existe $r_0 \in (0, 1)$ tal que

$$J_*(v_{r_0,\zeta}) < c_* + \delta \quad y \quad |\beta(v_{r_0,\zeta}) - \zeta| < \frac{1}{4}. \quad (7.38)$$

Sea $\overline{B}_{r_0}(0) := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq r_0\}$. Si escribimos a los puntos de $\overline{B}_{r_0}(0)$ como $x = r\zeta$ con $r \in [0, r_0]$ y $|\zeta| = r_0$, se tiene que la función

$$\alpha : \overline{B}_{r_0}(0) \rightarrow \mathcal{N}_*, \quad \alpha(x) := v_{r,\zeta},$$

está bien definida, es continua y cumple que

$$J_*(\alpha(x)) \leq \begin{cases} c & \forall x \in \overline{B}_{r_0}(0), \\ c_* + \delta & \forall x \in \partial \overline{B}_{r_0}(0). \end{cases}$$

Para $a \in \mathbb{R}$, denotemos por

$$J_*^a := \{u \in \mathcal{N}_* : J_*(u) \leq a\}.$$

Argumentando por contradicción, supongamos que $J_* : \mathcal{N}_* \rightarrow \mathbb{R}$ no tiene ningún valor crítico en el intervalo $[c_* + \delta, c]$. Del Corolario 7.18 y el ... se sigue que existe una función continua

$$\varrho : J_*^c \rightarrow J_*^{c_* + \delta}$$

tal que $\varrho(u) = u$ si $u \in J_*^{c_* + \delta}$. Considera la función $\phi : \overline{B}_{r_0}(0) \rightarrow \partial \overline{B}_{r_0}(0)$ dada por

$$\phi(x) := r_0 \frac{(\beta \circ \varrho \circ \alpha)(x)}{|(\beta \circ \varrho \circ \alpha)(x)|}.$$

Observa que, como $(\varrho \circ \alpha)(x) \in J_*^{c_* + \delta}$, la afirmación (7.37) asegura que $(\beta \circ \varrho \circ \alpha)(x) \neq 0$, así que ϕ está bien definida. Cumple además que

$$\phi(x) = r_0 \frac{(\beta \circ \alpha)(x)}{|(\beta \circ \alpha)(x)|} \quad \forall x \in \partial \overline{B}_{r_0}(0).$$

Ahora bien, si $x = r_0\zeta$, la afirmación (7.38) asegura que $|(\beta \circ \alpha)(r_0\zeta) - \zeta| < \frac{1}{4}$. Por tanto, $(1-s)[(\beta \circ \alpha)(r_0\zeta)] + s\zeta \neq 0$ para todo $s \in [0, 1]$. En consecuencia, la función

$$\begin{aligned} \Phi : [0, 1] \times \partial \overline{B}_{r_0}(0) &\rightarrow \partial \overline{B}_{r_0}(0) \\ \Phi(s, r_0\zeta) &:= r_0 \frac{(1-s)[(\beta \circ \alpha)(r_0\zeta)] + s\zeta}{|(1-s)[(\beta \circ \alpha)(r_0\zeta)] + s\zeta|} \end{aligned}$$

está bien definida y es una homotopía entre $\phi|_{\partial \overline{B}_{r_0}(0)}$ y la identidad de $\partial \overline{B}_{r_0}(0)$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $J_* : \mathcal{N}_* \rightarrow \mathbb{R}$ tiene ningún valor crítico en el intervalo $[c_* + \delta, c]$, es decir, el problema $(\wp_*)$ tiene una solución positiva. ■

Bibliografía

- [1] N. ACKERMANN, El lujo del flujo y teoremas minimax en el cálculo de variaciones, notas del minicurso impartido en la Escuela de Verano en Ecuaciones Diferenciales Parciales, 6-10 de Junio de 2011, Instituto de Matemáticas, UNAM. <http://www.matem.unam.mx/festin2011/>
- [2] A. AMBROSETTI, A. MALCHIODI, *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge University Press, New York 2007.
- [3] A. BAHRI, Topological results on a certain class of functionals and applications, *J. Funct. Anal.* **41** (1981), 397-427.
- [4] A. BAHRI, H. BERESTYCKI, A perturbation method in critical point theory and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.* **267** (1981), 1-32.
- [5] A. BAHRI, J.M. CORON, On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: The effect of the topology of the domain, *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 253-294.
- [6] A. BAHRI, P.L. LIONS, Morse index of some min-max critical points. I. Application to multiplicity results, *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 1027-1037.
- [7] A. BAHRI, P.L. LIONS, On the existence of a positive solution of semilinear elliptic equations in unbounded domains, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **14** (1997), 365-413.
- [8] T. BARTSCH, M. WILLEM, Infinitely many nonradial solutions of a Euclidean scalar field equation, *J. Funct. Anal.* **117** (1993), 447-460.
- [9] V. BENCI, G. CERAMI, The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **114** (1991), 79-93.
- [10] K. BORSUK, Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre, *Fund. Math.* **20** (1933), 177-190.

- [11] H. BREZIS, *Análisis funcional*, Alianza Editorial, Madrid 1984.
- [12] H. BREZIS, L. NIRENBERG, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Commun. Pure Appl. Math.* **36** (1983), 437-477.
- [13] G. CERAMI, Some nonlinear elliptic problems in unbounded domains, *Milan J. Math.* **74** (2006), 1-31.
- [14] M. CLAPP, *Análisis Matemático*, Colección Papirhos, Serie Textos, Núm. 2, Instituto de Matemáticas de la UNAM, 1a. Edición, México 2015..
- [15] M. CLAPP, F. PACELLA, Multiple solutions to the pure critical exponent problem in domains with a hole of arbitrary size, *Math. Z.* **259** (2008), 575-589.
- [16] M. CLAPP, D. PUPPE, Invariants of the Lusternik-Schnirelmann type and the topology of critical sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **298** (1986), 603-620.
- [17] M. CLAPP, D. PUPPE, Critical point theory with symmetries, *J. reine angew. Math.* **418** (1991), 1-29.
- [18] D.G. COSTA, *An invitation to Variational Methods in Differential Equations*, Birkhäuser, Boston 2007.
- [19] E.N. DANCER, A note on an equation with critical exponent, *Bull. London Math. Soc.* **20** (1988), 600-602.
- [20] W. DING, Positive solutions of $\Delta u + u^{2^*-1} = 0$ on contractible domains, *J. Partial Diff. Eq.* **2** (1989), 83-88.
- [21] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York 1969.
- [22] M.J. ESTEBAN, P.L. LIONS, Existence and nonexistence results for semilinear elliptic problems in unbounded domains, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **93** (1982/83), 1-14.
- [23] L.C. EVANS, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence RI 1998.
- [24] C.F. GAUSS, *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehung- und Abstossungskräfte*, Leipzig 1840; Werke V, Göttingen 1867, 195-242.
- [25] N. GAROFALO, F.-H. LIN, Unique continuation for elliptic operators: a geometric-variational approach, *Comm. Pure Appl. Math.* **40** (1987), 347-366.

- [26] B. GIDAS, W.-M. NI, L. NIRENBERG, Symmetry and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.* **68** (1979), 209-243.
- [27] B. GIDAS, W.-M. NI, L. NIRENBERG, Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in R^N , en *Mathematical Analysis and Applications - Part A, Advances in Mathematics, Supplementary Studies 7-A*, pp. 209-243, Academic Press 1981.
- [28] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2001.
- [29] S. HILDEBRANDT, A. TROMBA, *The parsimonious universe. Shape and form in the natural world*. Copernicus, New York 1996.
- [30] I.M. JAMES, Lusternik-Schnirelmann category, en *Handbook of Algebraic Topology*, Elsevier, 1995, 1293-1310.
- [31] D. JERISON, C.E. KENIG, Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrödinger operators, *Annals of Math.* **121** (1985), 463-494.
- [32] J. JOST, *Postmodern Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1998.
- [33] J. JOST, X. LI-JOST, *Calculus of Variations*, Cambridge University Press, New York 1998.
- [34] J. KAZDAN, F. WARNER, Remarks on some quasilinear elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **38** (1975), 557-569.
- [35] A.M. KRASNOSELSKII, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, A Pergamon Press Book, The Macmillan Co., New York 1964. (Traducción del original ruso, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1956.)
- [36] J. LEE, T. PARKER, The Yamabe problem, *Bull. Amer. Math. Soc.* **17** (1987), 37-81.
- [37] P.-L. LIONS, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case I, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1** (1984), 109-145.
- [38] S. LORCA, P. UBILLA, Symmetric and nonsymmetric solutions for an elliptic equation on $\mathbb{R}^N$, *Nonlinear Anal.* **58** (2004), 961-968.
- [39] L. LUSTERNIK, L. SCHNIRELMANN, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationels*, Hermann, Paris 1934.

-
- [40] M. MUSSO, F. PACARD, J. WEI, Finite-energy sign-changing solutions with dihedral symmetry for the stationary nonlinear Schrödinger equation, preprint 2011.
 - [41] R.S. PALAIS, Homotopy theory of infinite-dimensional manifolds, *Topology* **5** (1966), 1-16.
 - [42] R.S. PALAIS, Lusternik-Schnirelmann theory on Banach manifolds, *Topology* **5** (1966), 115-132.
 - [43] R.S. PALAIS, The principle of symmetric criticality. *Comm. Math. Phys.* **69** (1979), 19–30.
 - [44] R. PALAIS, S. SMALE, A generalized Morse theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70** (1964), 165-171.
 - [45] D. PASSASEO, Multiplicity of positive solutions of nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent in some contractible domains, *manuscripta math.* **65** (1989), 147-165.
 - [46] S. POHOŽAEV, Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Soviet Math. Dokl.* **6** (1965), 1408-1411.
 - [47] E.H. SPANIER, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York 1966.
 - [48] M. STRUWE, Infinitely many critical points for functionals which are not even and applications to superlinear boundary value problems, *manuscripta math.* **32** (1980), 335-364.
 - [49] M. STRUWE, *Variational methods*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1996.
 - [50] K. WEIERSTRASS, Über das sogenannte Dirichletsche Prinzip, *Mathematische Werke II*, Mayer & Müller, Berlin 1895, 49-54.
 - [51] M. WILLEM, *Minimax theorems*, PNLDE **24**, Birkhäuser 1996.