Расчетные модели макроэкономической динамики

Лектор: Оксана Анатольевна Малаховская

Лекция 1

4 февраля 2017г.

Появление DSGE-подхода было обусловлено необходимостью:

- дать ответ на критику Лукаса
- строить микрообонованные модели

Одна из целей экономического анализа состояла в построении «моделей реального мира», с помощью которых можно было бы предугадывать эффект шоков или политики.

- RAMSES (Швеция) - Adolfson et al (2007)
- NAWM (Еврозона) - Christofell et al (2008)
- SIGMA (США) - Erceg et al (2008)
- MEDEA (Испания) - Burriel et al (2010)
- REMS (Испания) - Bosca et al (2010) и др.

Особенности DSGE-моделей

- Результат зависит от решений, принятых экономических агентами (например, домохозяйствами, фирмами, государством). Задача - определить основные правила поведения агентов и далее анализировать, как агенты реагируют на изменяющиеся условия
- Рассматривают экономику в комплексе, отражая тот факт, что все переменные взаимосвязаны
- Учитывают изменение переменных во времени. Это важно, потому что реакция переменных на шок или политику не может быть мгновенной.

- Традиционный подход (Cowles Commission Approach, CCA)
  - отражал кейнсианские представления об экономике
  - состоял в использовании систем одновременных уравнений
  - демонстрировал низкую точность прогноза начиная с 70-х годов
- Критика Лукаса (Lucas,1972,1973,1976)
  - основывалась на идее о том, что взаимосвязи между переменными (например, параметры модели) зависят от проводимой политики
  - утверждала, что анализ макрополитики не может проводиться в модели без микрообоснований

Краткий исторический обзор(2)

- Критика CCA К.Симсом, VAR (Sims, 1980)
    - основывалась на необоснованности вводимых в рамках CCA ограничений
- Модель общего равновесия с рациональными ожиданиями (Kydland and Prescott, 1982)
    - включала совершенные рынки
    - отражала ситуацию, когда рецессии являются следствием временного замедления технического прогресса
    - описывала искусственные колебания, количественные характеристики которых соответствовали фактическим деловым циклам.

Термин введен Лонгом и Плоссером.

- построены на базе модели роста Солоу
- являются оптимизационными
- предполагают рациональные ожидания
- стали основой для современных новых кейнсианских моделей

Предпосылки:

- Производственная функция обладает постоянной отдачей от масштаба

$$Y_t = A_t F(K_t, H_t) \tag{1}$$

$$y_t = \frac{Y_t}{H_t} = A_t F\left(\frac{K_t}{H_t}, \frac{H_t}{H_t}\right) = A_t F(k_t, 1) = A_t f(k_t) \tag{2}$$

$$\text{где } k_t \equiv \frac{K_t}{H_t} \tag{3}$$

- Рабочая сила растет постоянным темпом

$$H_{t+1} = (1+n)H_t \tag{4}$$

Базовая модель Солоу: предпосылки(2)

- Динамика капитала задается уравнением:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \tag{5}$$

- Сбережения составляют фиксированную долю выпуска

$$S_t = \sigma Y_t \Rightarrow s_t = \sigma y_t \tag{6}$$

- Уровень технологии растет постоянным темпом

$$A_{t+1} = (1+\alpha)A_t \Rightarrow A_t = (1+\alpha)^t A_0 \tag{7}$$

В равновесии: $S_t = I_t \Rightarrow s_t = i_t$, где $i_t = \frac{I_t}{H_t}$
Из уравнений (2), (4) - (7)получаем:

$$(1+n)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + \sigma(1+\alpha)^t A_0 f(k_t) \tag{8}$$

Пусть для упрощения $\alpha = 0$

$$(1+n)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + \sigma A_0 f(k_t) \tag{9}$$

Стационарное состояние:

$$\begin{aligned} &(1+n)\bar{k} = (1-\delta)\bar{k} + \sigma A_0 f(\bar{k}) \Rightarrow \\ &(\delta+n)\bar{k} = \sigma A_0 f(\bar{k}) \end{aligned} \tag{10}$$

Запишем уравнение (9) как:

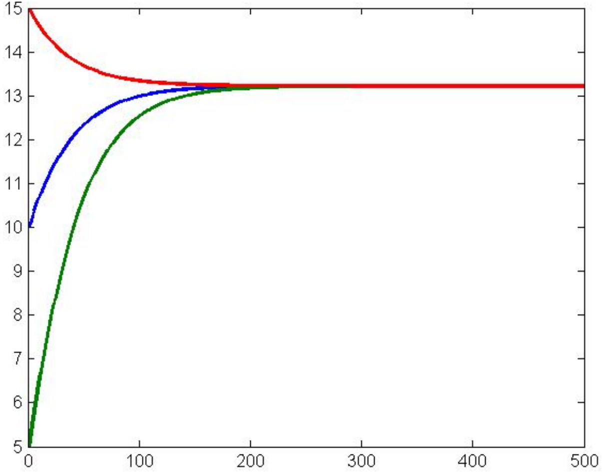
$$k_{t+1} = g(k_t) = \frac{(1-\delta)k_t + \sigma A_0 f(k_t)}{1+n} \tag{11}$$

и проанализируем основные выводы модели Солоу.

- Если все страны имеют доступ к одной и той же технологии, то страны с меньшим изначальным уровнем капитала на душу населения имеют более высокий темп роста, чем страны с большим изначальным уровнем капитала.

$$\frac{d(\frac{k_{t+1}}{k_t})}{dk_t} = \frac{\sigma A_0}{(1+n)k_t^2}\left[f'(k_t)k_t - f(k_t)\right] < 0 \qquad (12)$$

- Если в дополнение все страны имеют одну и ту же норму сбережения, то во всех странах происходит конвергенция к одному и тому же уровню запаса капитала и выпуска на одного работника


15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
0
100
200
300
400
500

Если темп роста технического прогресса постоянен, то все экономики демонстрируют конвергенцию к *траектории сбалансированного роста* - траектории, на которой темп роста капиталовооруженности и выпуска (на одного работника) постоянны. Для производственной функции Кобба-Дугласа этот постоянный темп роста легко найти (используем факт, что эта величина постоянна).

Пусть $f(k_t) = k_t^\theta$

$$\gamma = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{(1-\delta)k_t + \sigma A_0(1+\alpha)^t k_t^\theta}{(1+n)k_t} = \\ = \frac{1-\delta}{1+n} + \frac{\sigma A_0(1+\alpha)^t}{(1+n)k_t^{1-\theta}} \tag{13}$$

Выражаем k_t

$$k_t = \left(\frac{\sigma A_0 (1+\alpha)^t}{(1+n)\gamma - (1-\delta)} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} \tag{14}$$

Тогда:

$$\gamma = \frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{\left(\frac{\sigma A_0 (1+\alpha)^{t+1}}{(1+n)\gamma - (1-\delta)} \right)^{\frac{1}{1-\theta}}}{\left(\frac{\sigma A_0 (1+\alpha)^{t}}{(1+n)\gamma - (1-\delta)} \right)^{\frac{1}{1-\theta}}} = (1+\alpha)^{\frac{1}{1-\theta}} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{(1+\alpha)^{t+1} k_{t+1}^{\theta}}{(1+\alpha)^t k_t^{\theta}} = (1+\alpha) \left(\frac{k_{t+1}}{k_t} \right)^{\theta} = \\ = (1+\alpha) \left((1+\alpha)^{\frac{1}{1-\theta}} \right)^{\theta} = (1+\alpha)^{\frac{1}{1-\theta}} \end{aligned} \tag{16}$$

Золотое правило

Рассмотрим экономику без технического прогресса. Считаем, что благосостояние зависит только от потребления. Норма сбережений, которая максимизирует потребление в стационарном состоянии, называется соответствующей *золотому правилу*:

$$c_t = (1-\sigma)y_t = (1-\sigma)A_0 f(\bar{k}) \tag{17}$$

Существует несколько способов добавить в модель случайный шок: **уровень технологии**, норма сбережения, темп роста населения и т. д.

$$A_t = \psi \bar{A} + (1-\psi) A_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \text{нужно ограничение на } \varepsilon \tag{18}$$

$$A_t = \bar{A} e^{\varepsilon_t} \Rightarrow lnA_t = ln\bar{A} + \varepsilon_t \tag{19}$$

Подставляем в основное уравнение динамики:

$$k_{t+1} = g(k_t) = \frac{(1-\delta)k_t + \sigma \bar{A} \mathrm{e}^{\varepsilon_t} f(k_t)}{1+n} \tag{20}$$

Разделим на k_t и сделаем замену: $\gamma_t = \frac{k_{t+1}}{k_t}$

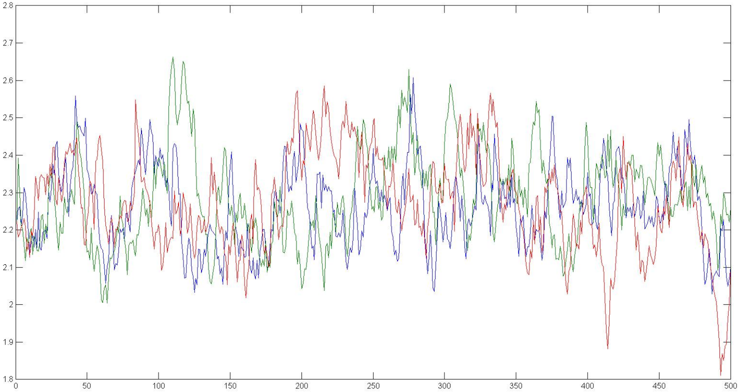
$$\frac{k_{t+1}}{k_t} = \frac{(1-\delta)k_t + \sigma \bar{A} \mathrm{e}^{\varepsilon_t} f(k_t)}{(1+n)k_t} \tag{21}$$

$$ln\left[\gamma_t - \frac{1-\delta}{1+n}\right] = \ln \frac{\sigma \bar{A}}{1+n} + ln\frac{f(k_t)}{k_t} + \varepsilon_t \tag{22}$$

Если производственная функция имеет вид функции Кобба-Дугласа $\left(f(k_t) = k_t^{\theta}\right)$,то это выражение принимает форму:

$$ln\left[\gamma_t - \frac{1-\delta}{1+n}\right] = \ln\frac{\sigma\bar{A}}{1+n} - (1-\theta)\ln k_t + \varepsilon_t \qquad (23)$$

Темп роста капиталовооруженности - есть нелинейная функция текущего запаса капитала и шока.


2.8
2.7
2.6
2.5
2.4
2.3
2.2
2.1
2
1.9
1.8
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

Для нелинейной модели не всегда легко найти дисперсию случайных величин. Поэтому обычно прибегают к логлинейной аппроксимации вокруг стационарного состояния и используют её для нахождения характеристик модели второго порядка. Например, нас может интересовать, каково должно быть распределение технологического шока, чтобы дисперсия выпуска была примерно такая же, как на реальных данных. Определим:

$$\tilde{X}_t = \ln X_t - \ln \bar{X} \tag{24}$$

Заметим, что тогда:

$$X_t = \bar{X} \mathrm{e}^{\tilde{X}_t} \tag{25}$$

Из разложения в ряд Тейлора (до первого порядка):

$$f(x)|_a \approx f(a) + f'(x)|_a(x-a) \tag{26}$$

следует, что для небольших отклонений $\tilde{X}_t$ и $\tilde{Y}_t$ можно использовать (здесь $a = 0$):

$$\mathrm{e}^{\tilde{X}_t} \approx 1 + \tilde{X}_t \tag{27}$$

$$\mathrm{e}^{\tilde{X}_t + b\tilde{Y}_t} \approx 1 + \tilde{X}_t + b\tilde{Y}_t \tag{28}$$

Динамика капиталовооружености: логлинеаризация

Используем уравнение (20) для $f(k_t) = k_t^\theta$

$$(1+n)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + \sigma \bar{A} \mathrm{e}^{\varepsilon_t} k_t^\theta \tag{29}$$

Заменим k_t на $\bar{k}\mathrm{e}^{\tilde{k}_t}$ (где $\tilde{k}_t = \ln k_t - \ln \bar{k}$) и аналогично для k_{t+1}:

$$(1+n)\bar{k}\mathrm{e}^{\tilde{k}_{t+1}} = (1-\delta)\bar{k}\mathrm{e}^{\tilde{k}_t} + \sigma \bar{A} \mathrm{e}^{\varepsilon_t} \left(\bar{k}\mathrm{e}^{\tilde{k}_t}\right)^\theta \tag{30}$$

$$(1+n)\bar{k}\mathrm{e}^{\tilde{k}_{t+1}} = (1-\delta)\bar{k}\mathrm{e}^{\tilde{k}_t} + \sigma \bar{A} \bar{k}^\theta \mathrm{e}^{\theta\tilde{k}_t + \varepsilon_t} \tag{31}$$

Используем правила (27) и (28), получим:

$$\begin{aligned}(1+n)\bar{k}(1+\tilde{k}_{t+1}) = (1-\delta)\bar{k}(1+\tilde{k}_t) &+ \\ + \sigma \bar{A} \bar{k}^\theta (1 + \theta\tilde{k}_t + \varepsilon_t)&\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}(1+n)\bar{k} + (1+n)\bar{k}\tilde{k}_{t+1} = (1-\delta)\bar{k} + (1-\delta)\bar{k}\tilde{k}_t &+ \\ + \sigma \bar{A} \bar{k}^\theta + \sigma \bar{A} \bar{k}^\theta (\theta\tilde{k}_t + \varepsilon_t)&\end{aligned} \tag{33}$$

Уравнение (29) в стационарном состоянии имеет вид:

$$(1+n)\bar{k} = (1-\delta)\bar{k} + \sigma \bar{A}\bar{k}^{\theta} \tag{34}$$

Взаимоуничтожение одинаковых линейных членов в уравнении (33) позволяет получить:

$$(1+n)\bar{k}\tilde{k}_{t+1} = (1-\delta)\bar{k}\tilde{k}_t + \sigma \bar{A}\bar{k}^{\theta}(\theta\tilde{k}_t + \varepsilon_t), \tag{35}$$

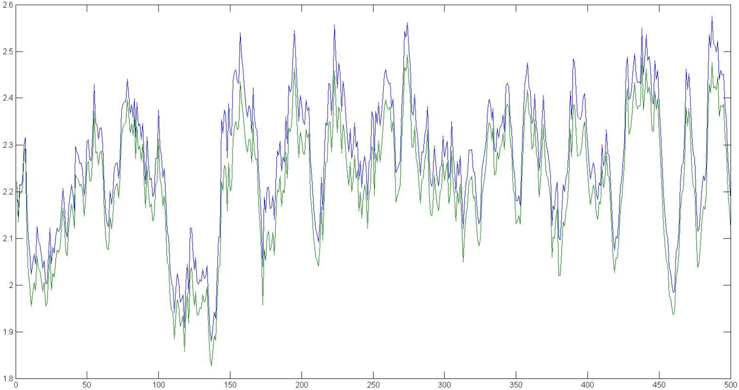
или в более компактной записи:

$$\tilde{k}_{t+1} = B\tilde{k}_t + C\varepsilon_t, \tag{36}$$

$$\text{где } B = \frac{1-\delta}{1+n} + \frac{\theta\sigma\bar{A}\bar{k}^{\theta-1}}{1+n} = \frac{1+\theta n - \delta(1-\theta)}{1+n} < 1, \tag{37}$$

$$C = \frac{\sigma\bar{A}\bar{k}^{\theta-1}}{1+n} = \frac{\delta+n}{1+n} \tag{38}$$

Сравнение капиталовооруженности



Из (36) следует, что:

$$\tilde{k}_t = B\tilde{k}_{t-1} + C\varepsilon_{t-1} \tag{39}$$

Рекурсивная подстановка позволяет получить:

$$\tilde{k}_t = B(B\tilde{k}_{t-2} + C\varepsilon_{t-2}) + C\varepsilon_{t-1} = ... = C\sum_{i=0}^{\infty} B^i \varepsilon_{t-i-1} \tag{40}$$

С помощью этого выражения можно посчитать дисперсию капиталовооруженности вокруг стационарного состояния: Т.к. технологические шоки независимы, то:

$$E[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 0\text{при } i \neq j \Rightarrow \tag{41}$$

Выпуск

$$var(\tilde{k}_t) = C^2 \sum_{i=0}^{\infty} B^{2i} var(\varepsilon_t) = \frac{C^2}{1 - B^2} var(\varepsilon_t) \tag{42}$$

Выведем логлинеаризованное уравнение для переменной y

$$y_t = \bar{A} \mathrm{e}^{\varepsilon_t} k_t^{\theta} \tag{43}$$

$$\bar{y} \mathrm{e}^{\tilde{y}_t} = \bar{A} \mathrm{e}^{\varepsilon_t} \left(\bar{k} \mathrm{e}^{\tilde{k}_t} \right)^{\theta} = \bar{A} \bar{k}^{\theta} \mathrm{e}^{\theta \tilde{k}_t + \varepsilon_t} \tag{44}$$

$$\bar{y}(1 + \tilde{y}_t) = \bar{A} \bar{k}^{\theta} (1 + \theta \tilde{k}_t + \varepsilon_t) \tag{45}$$

$$\bar{y} + \bar{y} \tilde{y}_t = \bar{A} \bar{k}^{\theta} + \bar{A} \bar{k}^{\theta} (\theta \tilde{k}_t + \varepsilon_t) \tag{46}$$

Уравнение (43) в стационарном состоянии превращается в: $\bar{y} = \bar{A}\bar{k}_t^{\theta}$. При подстановке в (46), получаем:

$$\tilde{y}_t = \theta \tilde{k}_t + \varepsilon_t \tag{47}$$

$$\begin{aligned} var(\tilde{y}_t) = E(\tilde{y}_t^2) = E\left[\left(\theta \tilde{k}_t + \varepsilon_t\right)\left(\theta \tilde{k}_t + \varepsilon_t\right)\right] = \\ = var(\varepsilon_t) + \theta^2 var(\tilde{k}_t) \end{aligned} \tag{48}$$

Бесконечно живущие агенты - часто используемая предпосылка в макроэкономическом моделировании

- семейные династии и мотив оставления наследства
- принятие решений в ранней молодости
- облегчает анализ (в модели, в которой структура экономики не меняется во времени, можно использовать стандартные методы нахождения стационарного состояния).

Рассмотрим модель детерминистической экономики, в которой агенты обладают абсолютным предвидением.

Предпосылки:

- Единственный потребитель с функцией полезности:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(c_{t+i}), \quad 0 < \beta < 1, \quad u'(\cdot) > 0, \quad u''(\cdot) < 0 \tag{49}$$

- и бюджетными ограничениями:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t \tag{50}$$

$$y_t = f(k_t) \geq c_t + i_t \tag{51}$$

Вариационные методы используются для нахождения стационарного состояния в динамической задаче. Основная идея: предположить, что значения эндогенных переменных в периодах $s-1$ и $s+1$ зафиксированы и максимизмровать целевую функцию для периода s. Получившиеся условия первого порядка должны выполняться в стационарном состоянии вместе с условием о неизменности переменных в периоды $s-1, s, s+1$.

Целевая функция

$$c_t = y_t - i_t = f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t \tag{52}$$

Функция полезности может быть записана как:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(f(k_{t+i}) - k_{t+i+1} + (1-\delta)k_{t+i}) = \\
&= ...\beta^{s-t-1} u(f(k_{s-1}) - k_s + (1-\delta)k_{s-1}) + \\
&+ \beta^{s-t} u(f(k_s) - k_{s+1} + (1-\delta)k_s) + ...
\end{aligned} \tag{53}$$

Можем найти FOC (уравнение Эйлера) для $s \geq t$:

Условия первого порядка (FOC)

$$
\begin{aligned}
0 = \beta^{s-t} u'(f(k_s) - k_{s+1} + (1-\delta)k_s)\left(f'(k_s) + (1-\delta)\right) - \\
- \beta^{s-t-1} u'(f(k_{s-1}) - k_s + (1-\delta)k_{s-1})
\end{aligned}
\tag{54}
$$

$$
f'(k_s) + (1-\delta) = \frac{u'(f(k_{s-1} - k_s + (1-\delta)k_{s-1})}{\beta u'(f(k_s) - k_{s+1} + (1-\delta)k_s)} \tag{55}
$$

Из указанного условия первого порядка можно найти стационарное значение: $k_{s-1} = k_s = k_{s+1} = \bar{k}$:

$$
f'(\bar{k}) = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta \tag{56}
$$

Если известно стационарное состояние для $\bar{k}$, то можно легко найти его для $\bar{c}$ и $\bar{y}$

FOC, рассмотренные на предыдущих слайдах, представляют собой необходимые условия. Для достаточности необходимо дополнить их *условием трансверсальности*.
Рассмотрим условие трансверсальности в общем виде. Пусть задача записана как:

$$\max_{x_s|_{s=t}^{\infty}} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i F(x_{t+i}, x_{t+i+1}) \tag{57}$$

Уравнение Эйлера для этой задачи записывается как:

$$0 = F_2\left(x_{s-1}, x_s\right) + \beta F_1\left(x_s, x_{s+1}\right), \tag{58}$$

где $F_1(\cdot)$-производная по первому аргументу, а $F_2(\cdot)$-производная по второму аргументу.

Тогда условие трансверсальности имеет вид:

$$\lim_{s\to\infty} \beta^s F_1(x_s, x_{s+1})\, x_s = 0 \tag{59}$$

Условие трансверсальности требует, чтобы произведение предельного продукта по переменной x и самой этой переменной асимптотически росло с темпом, меньшим, чем $\frac{1}{\beta}$

Условие трансверсальности(3)

$$\lim_{s\to\infty} \beta^s F_1\left(x_s, x_{s+1}\right) x_s = 0$$

В рассмотренной выше задаче целевая функция - функция полезности. $F_1(\cdot)$ - изменение функции полезности при малом приращении капитала. Интерпретация уравнения состоит в следующем: увеличение полезности от накопления капитала должно расти медленнее, чем с темпом $\frac{1}{\beta}$. В обратном случае оптимально было бы постоянно наращивать капитал, откладывая потребление, и стационарного состояния не существовало бы.

Приведем пример, когда условие трансверсальности не выполняется. Пусть:

$$f(k_t) = 0.2k_t; \quad u(c_t) = c_t; \quad \delta = 0.1; \quad \beta = 0.98 \tag{60}$$

и агент с *конечным* жизненным циклом максимизирует:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{T} \beta^i u\left(f(k_{t+i}) - k_{t+i+1} + (1-\delta)k_{t+i}\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{T} (0.98)^i (1.1k_{t+i} - k_{t+i+1}) = \\
&= 1.1k_t - k_{t+1} + 0.98(1.1k_{t+1} - k_{t+2}) + \ldots + \\
&+ 0.98^T (1.1k_{t+T} - k_{t+T+1})
\end{aligned} \tag{61}$$

Оптимально: $c_t = c_{t+1} = \ldots = c_{t+T-1} = 0$, $c_{t+T} = y_{t+T}$

Предпосылки:

- Единственный потребитель с функцией полезности:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(c_{t+i}, h_{t+i}), \quad u'_c(c_{t+i}, h_{t+i}) > 0, \quad u'_h(c_{t+i}, h_{t+i}) < 0 \tag{62}$$

- и бюджетными ограничениями:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t \tag{63}$$

$$y_t = f(k_t) \geq c_t + i_t \tag{64}$$

Условная максимизация

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i [u(c_{t+i}, h_{t+i}) - \lambda_{t+i}(k_{t+i+1} - (1-\delta)k_{t+i} - i_{t+i}) - \\ - \mu_{t+i}(f(k_{t+i}, h_{t+i}) - c_{t+i} - i_{t+i})] \tag{65}$$

Условия первого порядка:

$$u_c(c_s, h_s) = \lambda_s = -\mu_s \tag{66}$$

$$\frac{u_h(c_s, h_s)}{u_c(c_s, h_s)} = -f_h(k_s, h_s) \tag{67}$$

$$\frac{u_c(c_s, h_s)}{u_c(c_{s+1}, h_{s+1})} = \beta[f_k(k_{s+1}, h_{s+1}) + 1 - \delta] \tag{68}$$

$$k_{s+1} = (1-\delta)k_s + f(k_s, h_s) - c_s \tag{69}$$

Условная максимизация(2)

В стационарном состоянии эти условия сводятся к:

$$\frac{1}{\beta} - (1 - \delta) = f_k(k, h) \tag{70}$$

$$\delta k = f(k, h) - c \tag{71}$$

$$\frac{u_h(c, h)}{u_c(c, h)} = -f_h(k, h) \tag{72}$$

Пусть в экономике Робинзона Круза с эндогеными затратами труда производственная функция и функция полезности имеют следующий вид:

$$y_t = f(k_t, h_t) = k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} \tag{73}$$

$$u(c_t, h_t) = ln(c_t) + Bln(1 - h_t) \tag{74}$$

Условия первого порядка (70)-(72) принимают вид:

$$\frac{1}{\beta} - (1 - \delta) = \theta \bar{k}^{\theta-1} \bar{h}^{1-\theta} \tag{75}$$

$$\delta \bar{k} = \bar{k}^{\theta} \bar{h}^{1-\theta} - c \tag{76}$$

$$B \frac{c}{1 - \bar{h}} = (1 - \theta) \bar{k}^{\theta} \bar{h}^{-\theta} \tag{77}$$

Откуда следует, что:

$$\bar{h} = \left[\frac{1}{\beta\theta} - \frac{1-\delta}{\theta}\right]^{\frac{1}{1-\theta}} \bar{k} = G\bar{k} \tag{78}$$

$$\bar{c} = \left[\frac{1}{\beta\theta} - \frac{1-\delta}{\theta} - \delta\right] \bar{k} = J\bar{k} \tag{79}$$

$$\bar{k} = \frac{(1-\theta)(\delta+J)}{G(BJ+(1-\theta)(\delta+J))} \tag{80}$$

Конкурентная экономика

- Существует отдельный сектор потребителей и отдельный сектор фирм.
- Потребители идентичны, их множество мощности континуума [0,1].
- Рынки труда и капитала конкурентные

- Задача потребителя состоит в максимизации функции полезности:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i, h_t^i) \tag{81}$$

- при бюджетных ограничениях:

$$\begin{aligned} c_t^i &= w_t h_t^i + r_t k_t^i - i_t^i \\ w_t &= f_h(K_t, H_t) \\ r_t &= f_k(K_t, H_t) \\ k_{t+1}^i &= (1-\delta)k_t^i + i_t^i \end{aligned} \tag{82}$$

Задача условной максимизации:

$$\mathcal{L}^i = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [u(c_t^i, h_t^i) - \lambda_t \left(k_{t+1}^i - (1-\delta)k_t^i - i_t^i\right) - \\ - \mu_t \left(f_h(K_t, H_t)h_t^i + f_k(K_t, H_t)k_t^i - c_t^i - i_t^i\right)] \tag{83}$$

$$\text{s.t } H_t = \int_0^1 h_t^i di \qquad K_t = \int_0^1 k_t^i di \tag{84}$$

$$u_c(c_s^i, h_s^i) = \lambda_s = -\mu_s \tag{85}$$

$$\frac{u_h(c_s^i, h_s^i)}{u_c(c_s^i, h_s^i)} = -f_h(K_s, H_s) \tag{86}$$

$$\frac{u_c(c_s^i, h_s^i)}{u_c(c_{s+1}^i, h_{s+1}^i)} = \beta[f_k(K_{s+1}, H_{s+1}) + 1 - \delta] \tag{87}$$

Добавляем бюджетные ограничения и правила агрегирования:

$$k_{t+1}^i = (1-\delta)k_t^i + f_h(K_t, H_t)h_t^i + f_k(K_t, H_t)k_t^i - c_t^i \tag{88}$$

$$H_t = \int_0^1 h_t^i di \tag{89}$$

$$K_t = \int_0^1 k_t^i di \tag{90}$$

Производственная функция обладает постоянной отдачей от масштаба, и, в условиях совершенной конкуренции и свободного входа, прибыль фирм равна нулю.

$$f_h(K_t, H_t)H_t + f_k(K_t, H_t)K_t = f(K_t, H_t) \tag{91}$$

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + f(K_t, H_t) - C_t \tag{92}$$

где C_t-агрегированное потребление:

$$C_t = \int_0^1 c_t^i di \tag{93}$$

FOC для агрегированных переменных

Если все домашние хозяйства одинаковы, то условия первого порядка могут быть переписаны для агрегированных переменных:

$$\frac{u_h(C_s, H_s)}{u_c(C_s, H_s)} = -f_h(K_s, H_s) \tag{94}$$

$$\frac{u_c(C_s, H_s)}{u_c(C_{s+1}, H_{s+1})} = \beta[f_k(K_{s+1}, H_{s+1}) + 1 - \delta] \tag{95}$$

Выводы: Условия равновесия для конкурентной экономики представляют собой агрегированную версию тех же самых условий для экономики Робинзона Крузо (см. уравнения (71)-(72) из прошлой лекции). Стационарное состояние для конкурентной экономики такое же, как и в экономике Робинзона Крузо.

Рекурсивные детерминистические модели

В рассмотренной прежде модели Солоу природа рассматриваемой задачи не менялась с течением времени:

- одномоментные функции полезности не меняются
- дисконтный фактор не меняется
- производственная функция не меняется

Что может меняться:

- значения переменных в прошлом периоде

Для задач такого плана могут быть использованы *рекурсивные методы*

Переменные состояния и контроля

State variables - переменные состояния - переменные, значения которых уже определены либо действиями агентов в прошлом, либо каким-то экзогенным процессом.
Control variables - переменные контроля - переменные, значения которых выбираются агентами в текущий период времени исходя из задачи максимизации определенной целевой функции
Пример: модель Робинзона Крузо из прошлой лекции

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(c_{t+i}) \tag{96}$$

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t \tag{97}$$

$$y_t = f(k_t) = c_t + i_t \tag{98}$$

k_t - переменная состояния
Переменными контроля могут быть:

$$\mathrm{c}_t \to i_t, k_{t+1} \qquad k_{t+1} \to i_t, c_t \tag{99}$$

Предположим, мы можем посчитать значение дисконтированной функции полезности:

$$V(k_t) = \max_{k_s|_{s=t+1}^{\infty}} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(f(k_{t+i}) - k_{t+i+1} + (1-\delta)k_{t+i}) \quad (100)$$

$V(k_t)$ - функция изначального запаса капитала k_t (заданного в период t). В периоде $t+1$ $\quad k_{t+1}$ задано (т.к. определено в предыдущий период) и задача максимизации может быть записана аналогично:

$$V(k_{t+1}) = \max_{k_s|_{s=t+2}^{\infty}} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(f(k_{t+i+1}) - k_{t+i+2} + (1-\delta)k_{t+i+1}) \quad (101)$$

Уравнение Беллмана

С учетом этого задача (100) может быть переписана как:

$$V(k_t) = \max_{k_{t+1}}[u(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) + \\ + \beta \max_{x_s|_{s=t+2}^{\infty}} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(f(k_{t+i+1}) - k_{t+i+2} + (1-\delta)k_{t+i+1}] \tag{102}$$

или

$$V(k_t) = \max_{k_{t+1}}[u(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) + \beta V(k_{t+1})] \tag{103}$$

Уравнение (103) носит название уравнения Беллмана

Уравнение Беллмана (2)

Уравнение (103)- это рекурсивная запись для (100). Теперь k_{t+1} выбирается так, чтобы максимизировать однопериодную функцию. Однако сложность состоит в том, что $V(k_{t+1})$ неизвестно.

Литература

Основная литература:

- McCandless, G. The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic models, Harvard University Press, 2008, ch1