# Расчетные модели макроэкономической динамики

Лектор: Оксана Анатольевна Малаховская

Лекция 2

11 февраля 2017г.

# Функция стоимости

Предположим, мы можем посчитать значение дисконтированной функции полезности:

$$V(k_t) = \max_{k_s|_{s=t+1}^{\infty}} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(f(k_{t+i}) - k_{t+i+1} + (1-\delta)k_{t+i}) \qquad (1)$$

$V(k_t)$ - функция изначального запаса капитала $k_t$ (заданного в период $t$). В периоде $t+1$ $k_{t+1}$ задано (т.к. определено в предыдущий период) и задача максимизации может быть записана аналогично:

$$V(k_{t+1}) = \max_{k_s|_{s=t+2}^{\infty}} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(f(k_{t+i+1}) - k_{t+i+2} + (1-\delta)k_{t+i+1}) \quad (2)$$

# Уравнение Беллмана

С учетом этого задача (1) может быть переписана как:

$$V(k_t) = \max_{k_{t+1}}[u(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) + \\ + \beta \max_{x_s|_{s=t+2}^{\infty}} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(f(k_{t+i+1}) - k_{t+i+2} + (1-\delta)k_{t+i+1}] \tag{3}$$

или

$$V(k_t) = \max_{k_{t+1}}[u(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) + \beta V(k_{t+1})] \tag{4}$$

Уравнение (4) носит название уравнения Беллмана

# Уравнение Беллмана (2)

Уравнение (4)- это рекурсивная запись для (1). Теперь $k_{t+1}$ выбирается так, чтобы максимизировать однопериодную функцию. Однако сложность состоит в том, что $V(k_{t+1})$ неизвестно.

Пусть $x_t$ - вектор переменных состояния периода $t$, а $y_t$ - вектор переменных контроля периода $t$. Пусть $F(x_t, y_t)$ - это целевая функция периода $t$, которую нужно максимизировать. С учетом начальных значений переменных состояния $x_t$ решаемая задача выглядит как:

$$V(x_t) = max_{\{y_s\}_{s=t}^{\infty}} \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} F(x_s, y_s), \qquad s \geq t \tag{5}$$

$$\text{s.t } x_{s+1} = G(x_s, y_s) \tag{6}$$

Функция стоимости может быть записана в виде уравнения Беллмана:

$$V(x_t) = max_{y_t} [F(x_t, y_t) + \beta V(x_{t+1})] \tag{7}$$

$$\text{s.t } x_{t+1} = G(x_t, y_t) \tag{8}$$

# Общая версия задачи (2)

Заменяя будущие значения переменных состояния в целевой функции, получаем:

$$V(x_t) = max_{y_t} \left[ F(x_t, y_t) + \beta V(G(x_t, y_t)) \right] \tag{9}$$

Решение задачи представляет собой функцию переменных контроля от переменных состояния, называемую *policy function*.

$$y_t = H(x_t) \tag{10}$$

Уравнение (10) должно выполняться для каждого $x_t$ из области определения. Это означает, что должно быть выполнено условие:

$$V(x_t) = F(x_t, H(x_t)) + \beta V(G(x_t, H(x_t))) \tag{11}$$

Чтобы найти *policy function*, запишем FOC для (9):

$$F'_y(x_t, y_t) + \beta V'_{x_{t+1}}(G(x_t, y_t))G'_y(x_t, y_t) = 0 \qquad (12)$$

- $F'_y(x_t, y_t)$ - вектор производных целевой функции по переменным контроля
- $V'_{x_{t+1}}(G(x_t, y_t))$ -вектор производных функции стоимости по переменным состояния следующего периода
- $G'_y(x_t, y_t)$ - вектор производных бюджетных ограничений по переменным контроля

Проблема состоит в том, что функция стоимости неизвестна.

Но мы можем использовать теорему об огибающей:

$$V'(x_t) = F_{x_t}(x_t, y_t) + \beta V'(G(x_t, y_t))G_x(x_t, y_t) \tag{13}$$

Если переменные контроля выбираются, так чтобы $G_x(x_t, y_t) = 0$, тогда это выражение можно упростить:

$$V'(x_t) = F_{x_t}(x_t, y_t) \tag{14}$$

Тогда условия первого порядка, заданные уравнением (12), могут быть записаны как:

$$F_y(x_t, y_t) + \beta F'_{x_{t+1}}(x_{t+1}, y_{t+1}))G_y(x_t, y_t) = 0 \Rightarrow \tag{15}$$

$$F_y(x_t, y_t) + \beta F'_{x_{t+1}}(G(x_t, y_t), y_{t+1}))G_y(x_t, y_t) = 0 \tag{16}$$

## Общая версия задачи (5)

- Если функция $F_x(G(x_t, y_t), y_{t+1})$ не зависит от $y_{t+1}$, то из этого уравнения можно получить неявную функцию $y_t = H(x_t)$
- Если функция $F_x(G(x_t, y_t), y_{t+1})$ зависит от $y_{t+1}$, то можно найти стационарное состояние

Если $G_x(x_t, y_t) \neq 0$, тогда альтернативный метод состоит в приблизительном нахождении функции стоимости численными методами.

# Общая версия задачи (6)

- Делаем предположение относительно $V_0(x_t)$ (например, $V_0(x_t) = 0$ для всех $x_t$)
- Корректируем функцию по формуле:
  $V_1(x_t) = max_{y_t}\left[F(x_t, y_t) + \beta V_0(G(x_t, y_t))\right]$
  и выполняем поиск максимума на сетке.
- Корректируем функцию по формуле:
  $V_2(x_t) = max_{y_t}\left[F(x_t, y_t) + \beta V_1(G(x_t, y_t))\right]$ и т.д.

Эта итеративная процедура приводит к определению последовательности примерных функций стоимости: $\{V_i(x_t)\}_{i=0}^{\infty}$. Как правило, в экономических задачах эта последовательность сходится к функции стоимости $V(x_t)$. В процессе нахождения функции стоимости возникает также последовательность *policy functions*, которая сходится к $y = H(x_t)$.

# Исходный пример

$$x_t = k_t, \qquad y_t = k_{t+1} \tag{17}$$

Целевая функция для этой экономики:

$$F(x_t, y_t) = u(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) \tag{18}$$

И бюджетное ограничение записано так, чтобы в момент $t+1$ переменная состояния была равна:

$$k_{t+1} = x_{t+1} = G(x_t, y_t) = y_t \tag{19}$$

Условие первого порядка для этой экономики выглядит как:

$$F_y(x_t, y_t) + \beta V'(G(x_t, y_t))G_y(x_t, y_t) = 0 \Rightarrow \tag{20}$$

$$\Rightarrow -u'(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) + \beta V'(G(x_t, y_t)) = 0 \tag{21}$$

# Исходный пример(2)

Подобный выбор бюджетного ограничения облегчает решение задачи.
Из теоремы об огибающей:

$$V'(x_t) = F_x(x_t, y_t) + \beta V'(G(x_t, y_t))G_x(x_t, y_t) \tag{22}$$

В нашем случае:

$$G'_x(x_t, y_t)) = \frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} = 0 \tag{23}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} V'(x_t) = F_x(x_t, y_t)) = u'(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t)(f'(k_t)+ \\ + 1 - \delta) \end{aligned} \tag{24}$$

При подстановке этого уравнения в (21) получаем:

# Исходный пример(3)

$$-u'(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) + \beta[u'(f(k_{t+1}) - \\ - k_{t+2} + (1-\delta)k_{t+1})(f'(k_{t+1}) + 1 - \delta)] = 0 \tag{25}$$

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta(f'(k_{t+1}) + 1 - \delta) \tag{26}$$

В стационарном состоянии получаем:

$$f'(\bar{k}) = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta \tag{27}$$

-это то же самое условие, которое мы получили ранее при решении задачи вариационными методами.

# Другой вариант для той же экономики(1)

$$x_t = k_t, \qquad y_t = \mathrm{c}_t \tag{28}$$

Тогда целевая функция и бюджетное ограничение имеют вид:

$$F(x_t, y_t) = u(c_t) \tag{29}$$

$$k_{t+1} = x_{t+1} = G(x_t, y_t) = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \tag{30}$$

Записываем уравнение Беллмана:

$$V(k_t) = max_{c_t}[u(c_t) + \beta V(f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t)] \tag{31}$$

Возьмем производную бюджетного ограничения по переменной контроля периода t:

$$\frac{\partial G(x_t, y_t)}{\partial x_t} = f'(k_t) + 1 - \delta \neq 0 \tag{32}$$

Из теоремы об огибающей:

$$\begin{aligned} V'(x_t) = F_x(x_t, y_t) + \beta V'(G(x_t, y_t))G_x(x_t, y_t) = \\ = \beta V'(f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t)(f'(k_t) + 1 - \delta) \end{aligned} \tag{33}$$

Это выражение уже не получится упростить, поэтому следует записывать целевую функцию и бюджетное ограничение, так чтобы $G_x(x_t, y_t) = 0$.

# Аппроксимация функции стоимости

Рассмотрим экономику, которую мы описывали на прошлой лекции:

$$f(k_t) = k_t^{\theta}, \qquad 0 < \theta < 1 \tag{34}$$

$$u(c_t) = ln(c_t) \tag{35}$$

Записываем уравнение Беллмана:

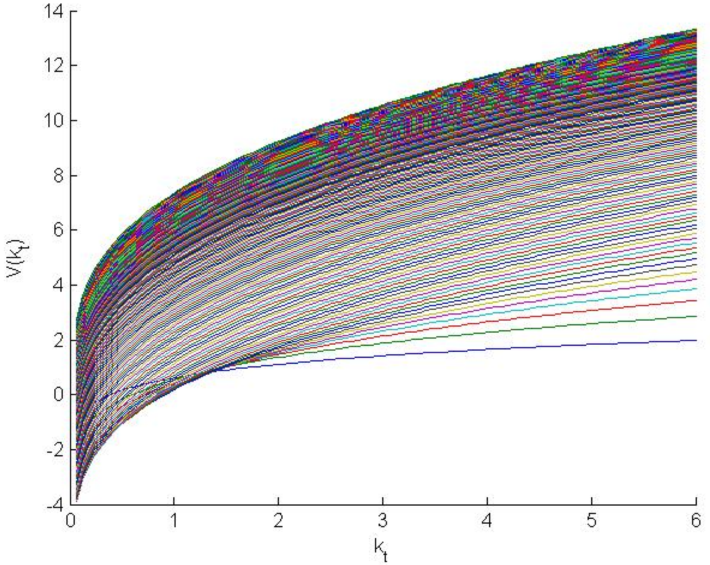
$$V(k_t) = max_{k_{t+1}} \left[ ln(k_t^{\theta} - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) + \beta V(k_{t+1}) \right] \tag{36}$$

Пусть параметры принимают следующие значения:

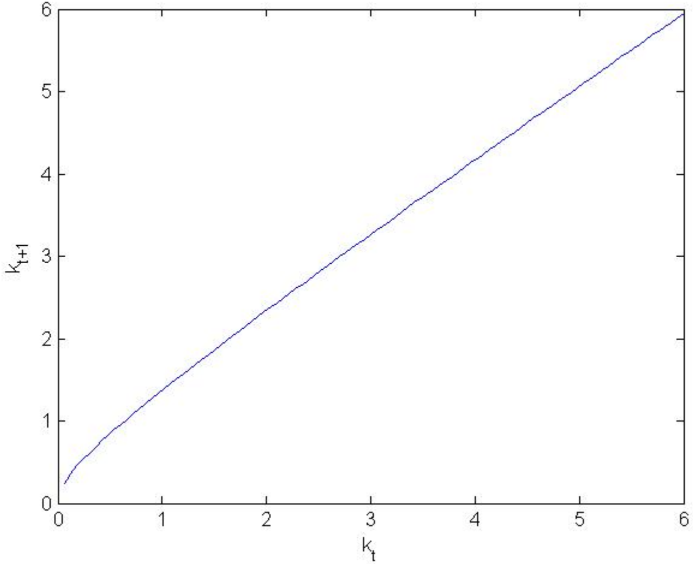
$$\delta = 0.1; \qquad \theta = 0.36; \qquad \beta = 0.98, \tag{37}$$

а изначальное предположение относительно функции стоимости: $V_0(k_{t+1}) \equiv 0$ для всех $k_{t+1}$

# Функция стоимости



# Policy function



До этого момента в основном мы работали с детерминистическими моделями. Модели, будучи аппроксимациями, целиком действительность не описывают.

# Мотивация для введения случайных шоков

Конкурентная экономика

- Не все значимые переменные могут быть включены в модель
  Например, в модели Робинзона Крузо мы не учитываем, как на выпуск влияет погода и другие факторы.
- Природа сама по себе случайна, и мы не можем предсказать все, даже если имеем полную информацию о текущем состоянии мира.

Пусть теперь в модели Робинзона Крузо производственная функция имеет вид:

$$y_t = A_t f(k_t), \text{где} \tag{38}$$

$$A_t = \begin{cases} A^{(1)} & \text{с вероятностью } p_1 \\ A^{(2)} & \text{с вероятностью } p_2 \end{cases} \tag{39}$$

Динамика капитала задана:

$$k_{t+1} = A_t f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \tag{40}$$

Цель потребителя состоит в максимизации **ожидаемой** дисконтированной полезности:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{41}$$

# Простая стохастическая модель роста(2)

Потребление в каждом периоде будет зависеть как от запаса капитала, так и от реализовавшегося уровня технологии

Период 0:$[A^{(1)}f(k_0), A^{(2)}f(k_0)]$ с вероятностями $[p_1, p_2] \Rightarrow [k_1^1, k_1^2]$

Период 1:$[A^{(1)}f(k_1^1), A^{(2)}f(k_1^1), A^{(1)}f(k_1^2), A^{(2)}f(k_2^2)]$

с вероятностями $[p_1^2, p_1 p_2, p_2 p_1, p_2^2] \Rightarrow [k_2^1, k_2^2, k_2^3, k_2^4]$ и т.д.

Определим значение максимальной ожидаемой дисконтированной полезности, если изначальный уровень капитала равен $k_0$ и $A_0 = A^{(1)}$

$$V(k_0, A^{(1)}) = \max_{c_t|_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{42}$$

$$\text{при условии для } t = 0: \tag{43}$$

$$k_1 = A^{(1)} f(k_0) + (1-\delta)k_0 - c_0 \tag{44}$$

$$\text{и для } : t \geq 1 \tag{45}$$

$$k_{t+1} = A_t f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \tag{46}$$

$$\text{где } : A_t = [A^{(1)}, A^{(2)}] \quad \text{с вероятностями } [p_1, p_2] \tag{47}$$

Аналогичную систему задачу можно записать для $V(k_0, A^{(2)})$ сделав замену в (44)

Заметим, что значение ожидаемой полезности - это функция **двух** переменых состояния - уровня капитала, доступного к данному периоду и шока технологии в данном периоде:

$$V(k_t, A_t) = max_{c_t}[u(c_t) + \beta E_t V(k_{t+1}, A_{t+1})] \tag{48}$$

$$\text{s.t.} k_{t+1} = A_t f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \tag{49}$$

Если заменить переменную контроля с $c_t$ на $k_t + 1$, то эта задача имеет вид:

$$V(k_t, A_t) = max_{k_{t+1}}[u(A_t f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1})+ \tag{50}$$

$$+\beta E_t V(k_{t+1}, A_{t+1})] \tag{51}$$

$$\text{s.t.} k_{t+1} = G(x_t, y_t) = k_{t+1} \tag{52}$$

Решением указанной задачи является функция **-план** :

$$k_{t+1} = H(k_t, A_t), \tag{53}$$

удовлетворяющая условию:

$$\begin{aligned} V(k_t, A_t) = [u(A_t f(k_t) + (1-\delta)k_t - H(k_t, A_t)]+ \\ + \beta E_t V(H(k_t, A_t), A_{t+1})] \end{aligned} \tag{54}$$

«max» мы уже не пишем, потому что $H(k_t, A_t)$ уже является решением оптимизационной задачи.

В общем случае функция стоимости выглядит как:

$$V(x_t, z_t) = max_{\{y_s\}_{s=t}^{\infty}} \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} F(x_s, y_s, z_s) \tag{55}$$

$$\text{s.t } x_{s+1} = G(x_s, y_s, z_s), \qquad s \geq t \tag{56}$$

где $x_t$ - набор «обычных» переменных состояния, $z_t$ - набор переменных состояния, определенных природой, $y_t$ - набор переменных контроля. И целевая функция $F(x_s, y_s, z_s)$, и бджетные ограничения $G(x_s, y_s, z_s)$ могут быть функциями от стохастических переменных контроля.

# Общая версия(2)

Эта задача может быть записана рекурсивно с помощью уравнения Беллмана:

$$V(x_t, z_t) = max_{y_t}[F(x_t, y_t, z_t) + \beta E_t V(x_{t+1}, z_{t+1})] \tag{57}$$

$$\text{s.t } x_{t+1} = G(x_t, y_t, z_t) \tag{58}$$

Решение этой задачи - это **план** следующего вида:

$$y_t = H(x_t, z_t), \text{где} \tag{59}$$

$$\begin{aligned} V(x_t, z_t) = F(x_t, H(x_t, z_t), z_t) + \\ + \beta E_t V(G(x_t, H(x_t, z_t), z_t), z_{t+1}) \end{aligned} \tag{60}$$

выполняется для всех значений переменых контроля, включая стохастические.

# Общая версия(3)

Условия первого порядка для задачи (57) - (58) :

$$F_y(x_t, y_t, z_t) + \beta E_t[V_x(G(x_t, y_t, z_t), z_{t+1})G_y(x_t, y_t, z_t)] = 0 \quad (61)$$

В дополнение, для внутренних решений теорема об огибающей:

$$V_x(x_t, z_t) = F_x(x_t, y_t, z_t) + \beta E_t[V_x(G(x_t, y_t, z_t), z_{t+1})G_x(x_t, y_t, z_t)] \quad (62)$$

Если мы можем выбрать переменные контроля, так что $G_x(x_t, y_t, z_t) = 0$, то уравнение (62) превращается в:

$$V_x(x_t, z_t) = F_x(x_t, y_t, z_t) \quad (63)$$

Тогда FOC позволяют записать стохастическое уравнение Эйлера:

$$F_y(x_t, y_t, z_t) + \beta E_t[F_x(G(x_t, y_t, z_t), y_{t+1}, z_{t+1})G_y(x_t, y_t, z_t)] = 0 \tag{64}$$

С использованием модели, которую мы использовали в начале лекции, мы опишем, как найти функцию стоимости и план.

$$A_t = \begin{cases} A^{(1)} & \text{с вероятностью } p_1 \\ A^{(2)} & \text{с вероятностью } p_2 \end{cases} \tag{65}$$

Запишем уравнения Беллмана

$$
\begin{aligned}
V(k_t, A^{(1)}) &= max_{k_{t+1}}[u(A^{(1)}f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) + \\
&\quad + \beta[p_1 V(k_{t+1}, A^{(1)}) + p_2 V(k_{t+1}, A^{(2)})]] \\
V(k_t, A^{(2)}) &= max_{k_{t+1}}[u(A^{(2)}f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) + \\
&\quad + \beta[p_1 V(k_{t+1}, A^{(1)}) + p_2 V(k_{t+1}, A^{(2)})]],
\end{aligned} \tag{66}
$$

где мы заменяем ожидания в правой части взешенным по вероятностям значениям функций стоимости

# Аппроксимация функции стоимости

Итеративная процедура начинается с выбора $V_0(k_t, A^{(1)})$и $V_0(k_t, A^{(2)})$. С их помощью находим $V_1(k_t, A^{(1)})$и $V_1(k_t, A^{(2)})$:

$$\begin{aligned} V_1(k_t, A^{(1)}) = max_{k_{t+1}}[u(A^{(1)}f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) + \\ + \beta[p_1 V_0(k_{t+1}, A^{(1)}) + p_2 V_0(k_{t+1}, A^{(2)})]] \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned} V_1(k_t, A^{(2)}) = max_{k_{t+1}}[u(A^{(2)}f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) + \\ + \beta[p_1 V_0(k_{t+1}, A^{(1)}) + p_2 V_0(k_{t+1}, A^{(2)})]] \end{aligned} \tag{68}$$

Повторением аналогичных действий получаем последовательность: $\{V_j(k_t, A^{(1)}), V_j(k_t, A^{(2)})\}|_{j=0}^{\infty}$, сходящуюся к $\{V(k_t, A^{(1)}), V(k_t, A^{(2)})\}$.

Чуть более сложный процесс может быть получен с использованием Марковских цепей.
В Марковской цепи вероятность реализации состояния природы в периоде $t$ зависит от реализации в $t-1$ и только в $t-1$.
Три элемента описывают подобный процесс:

- Возможные реализации случайного процесса: $\{A_t\} = \{A^{(1)}, A^{(2)}, ..., A^{(n)}\}$
- Матрица вероятностей перехода:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \quad \text{Например: } P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \tag{69}$$

- Начальное состояние природы

Вероятности, указанные в матрице (69), - это условные вероятности. Нас могут интересовать и *безусловные* вероятности. Единственное безусловное распределение вероятностей существует, если каждый элемент матрицы $P$ положителен.
Пусть $p_0$ - исходное распределение вероятностей (в периоде 1). Тогда распределение во втором периоде $p_0 P$, потом $p_0 P^2$ и т. д. Утверждение: при $n \Rightarrow \infty, p_0 P^n \Rightarrow P^\infty$ независимо от изначального распределения $p_0$

Воспользуемся предыдущим примером

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \Rightarrow P^2 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \Rightarrow \tag{70}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.825 & 0.175 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{\infty} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \tag{71}$$

Например, если $p_0 = (0.360.64)$ то:

$$p_0 P^{\infty} = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \tag{72}$$

Запишем функцию стоимости для экономики с марковским случайным процессом:

$$V_{j+1}(x_t, z_t) = max_{y_t}[F(x_t, y_t, z_t) + \beta E_t V_j(G(x_t, y_t, z_t)|z_t] \quad (73)$$

Для модели роста со случайным марковским процессом функции стоимости имеют вид:

$$\begin{aligned} V_1(k_t, A^{(1)}) = max_{k_{t+1}}[u(A^{(1)} f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1})+ \\ + \beta[p_{11} V(k_{t+1}, A^{(1)}) + p_{12} V_0(k_{t+1}, A^{(2)})]] \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} V_1(k_t, A^{(2)}) = max_{k_{t+1}}[u(A^{(2)} f(k_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1})+ \\ + \beta[p_{21} V_0(k_{t+1}, A^{(1)}) + p_{22} V_0(k_{t+1}, A^{(2)})]] \end{aligned} \quad (75)$$

# Литература

Основная литература:

- McCandless, G. The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic models, Harvard University Press, 2008, ch 3-5