Расчетные модели макроэкономической динамики

Лектор: Оксана Анатольевна Малаховская

Лекция 5

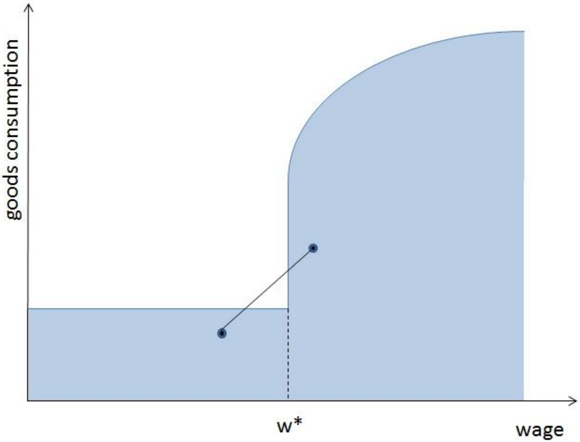
4 марта 2017г.

Модель Хансена с неделимым трудом

В реальном мире большинство работников заняты определенное количество часов в неделю или не заняты вообще. Хансен добавляет эту характеристку в свою динамическую модель. Домохозяйства подписывают контракт с фирмами и обеспечивают h_0 единиц труда в периоде t с вероятностью α_t. Случайный процесс определяет, работает ли данное домохозяйство в периоде t. Т.е. в каждом периоде доля α_t домашних хозяйств работает h_0 часов и $1-\alpha_t$ домохозяйств не работают вообще. Все домохозяйства получают один и тот же доход, независимо от того, работают они или нет. Так как рынком предлагается $\alpha_t h_0$ рабочих часов, то фирмы нанимают соответствующее количество труда и определяют зарплату как предельный продукт h_t единиц труда $h_t = \alpha_t h_0$.

Модель Хансена с неделимым трудом

Введение такого рода трудовых контрактов в модель имеет техническое объяснение. Это позволяет избежать появления невыпуклых множеств потребления.



Оптимизационные задачи имеют хорошо определенные решения, когда оптимизационные функции вогнутые и оптимизация осуществляется на выпуклых множествах. Бюджетное ограничение для каждого домохозяйства имеет вид:

$$c_t + i_t = w_t h_t + r_t k_t \tag{1}$$

Ожидаемая полезность в период t равна:

$$\begin{aligned} u(c_t, h_t) &= \ln c_t + \alpha_t \gamma \ln(1 - h_0) + (1 - \alpha_t)\gamma \ln(1) = \\ &= \ln c_t + h_t \frac{\gamma \ln(1 - h_0)}{h_0} = \\ &= \ln c_t + B h_t \end{aligned} \tag{2}$$

Деньги в RBC модели: cash in advance

Cooley and Hansen (1989) вводят деньги в модель Hansen (1985) с неделимым трудом. Ограничение заключается в том, что деньги могут быть потрачены только на потребительские товары. Покупка инвестиционных товаров не ограничена тем количеством денег, которое домохозяйство имеет на руках к началу периода, но связана бюджетным ограничением. Наличие денег создает жесткость (friction) в экономике, таким образом равновесие не обязано совпадать с равновесием в обычной модели.

- Предпосылки второй теоремы благосостояния больше не выполняются

Необходимо работать с многочисленными агентами, рынками и с жесткостью из-за cash-in-advance.

Функция полезности и производственная функция

Каждое домохозяйство максимизирует ожидаемую дисконтированную полезность:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^i, h_t^i) \tag{3}$$

Домохозяйства с вероятностью α_t^i предоставляют h_0 единиц труда

$$u(c_t^i, h_t^i) = \ln c_t^i + \left[\gamma \frac{\ln(1 - h_0)}{h_0}\right] h_t^i \tag{4}$$

Производственная функция:

$$y_t = A_t K_t^{\theta} H_t^{1-\theta}, \text{где} \tag{5}$$

$$\ln A_{t+1} = (1 - \rho_A) \ln \bar{A} + \rho \ln A_t + \varepsilon_{t+1}^A, \qquad \varepsilon_{t+1}^A \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \tag{6}$$

Рынки факторов производства и CIA-ограничение

Рынки труда и капитала совершенно конкурентны:

$$w_t = (1-\theta)A_t K_t^{\theta} H_t^{\theta} \quad (7)$$

$$r_t^k = \theta A_t K_t^{\theta-1} H_t^{1-\theta} \quad (8)$$

Ограничение CIA:

$$p_t c_t^i \leq m_{t-1}^i + (g_t - 1)M_{t-1} \quad (9)$$

где m_{t-1} - деньги, сохраненнные в прошлом периоде, $(g_t - 1)M_{t-1}$ - трансфер от государства.

- Домохозяйства - множество мощности континуум
- Трансфер от государства не зависит от собственных накоплений домашнего хозяйства

Существует условие при котором cash-in-advance ограничение всегда выполнено: $g_t \geq \beta$. Это означает, что в каждом периоде домохозяйство тратит всю отложенную наличность прошлого периода на потребительские блага.
Бюджетное ограничение:

$$c_t^i + k_{t+1}^i + \frac{m_t^i}{p_t} = w_t h_t^i + r_t k_t^i + (1-\delta)k_t^i + \frac{m_{t-1}^i + (g_t - 1)M_{t-1}}{p_t} \tag{10}$$

Далее необходимо определить стационарное состояние.

- Если $\bar{g} = 1$, то денежные запасы постоянны, и существует стационарное состояние
- Если $\bar{g} \neq 1$, то $M \uparrow$ или $M \downarrow$

Нормировка

Во втором случае можно все номинальные переменные нормировать либо к M_t, либо к p_t. Воспользуемся первым способом:

$$\hat{m}_t^i = \frac{m_t^i}{M_t}; \quad \hat{p}_t^i = \frac{p_t^i}{M_t}; \quad \frac{M_t}{M_t} = 1 \tag{11}$$

Использование нормализации дает возможность записать (9):

$$\frac{p_t}{M_t} c_t^i = \frac{m_{t-1}^i + (g_t - 1) M_{t-1}}{M_t} \tag{12}$$

$$\hat{p}_t c_t^i = \frac{\hat{m}_{t-1}^i + (g_t - 1)}{g_t} \tag{13}$$

С помощью той же нормализации бюджетное ограничение можно записать:

$$c_t^i + k_{t+1}^i + \frac{\hat{m}_t^i}{\hat{p}_t} = w_t h_t^i + r_t k_t^i + (1 - \delta) k_t^i + \frac{\hat{m}_{t-1}^i + (g_t - 1)}{g_t \hat{p}_t} \tag{14}$$

Общий вид модели(1)

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left(\beta^t \ln c_t^i + \left[\gamma \frac{\ln(1-h_0)}{h_0} \right] h_t^i \right) \tag{15}$$

$$\text{s.t.}\, c_t^i = \frac{\hat{m}_{t-1}^i + (g_t - 1)}{g_t \hat{p}_t} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} c_t^i + k_{t+1}^i + \frac{\hat{m}_t^i}{\hat{p}_t} = & \left(1-\theta)A_t K_t^{\theta} H_t^{-\theta}\right) h_t^i + \\ & + \left(\theta A_t K_t^{\theta-1} H_t^{1-\theta}\right) k_t^i + \\ & + (1-\delta) k_t^i + \frac{\hat{m}_{t-1}^i + (g_t - 1)}{g_t \hat{p}_t} \end{aligned} \tag{17}$$

Общий вид модели(1)

Динамика технологии и прироста денежной массы:

$$\ln A_{t+1} = (1-\rho)\ln \bar{A} + \rho \ln A_t + \varepsilon^A_{t+1} \tag{18}$$

Темп роста денежного предложения может задаваться либо как постоянная величина, либо с помощью случайного процесса, т.е. либо как:

$$g_t = \bar{g}, \text{либо как:} \tag{19}$$

$$\ln g_{t+1} = (1-\phi)\ln \bar{g} + \phi \ln g_t + \varepsilon^g_{t+1} \tag{20}$$

Решение модели

Условия агрегирования имеют вид:

$$K_t = k_t^i \tag{21}$$

$$H_t = h_t^i \tag{22}$$

$$C_t = c_t^i \tag{23}$$

$$\hat{M}_t = \hat{m}_t^i = 1 \tag{24}$$

Условия первого порядка:[1]

$$\frac{1}{\beta} = E_t \frac{w_t}{w_{t+1}} [(1-\delta) + r_{t+1}] \tag{25}$$

$$\frac{B}{w_t \hat{p}_t} = -\beta E_t \frac{1}{\hat{p}_{t+1} c^i_{t+1} g_{t+1}} \tag{26}$$

$$\hat{p}_t c^i_t = \frac{\hat{m}^i_{t-1} + g_t - 1}{g_t} \tag{27}$$

$$k^i_{t+1} + \frac{m^i_t}{\hat{p}_t} = (1-\delta)k^i_t + w_t h^i_t + r_t k^i_t \tag{28}$$

Равновесная зарплата и арендная стоимость капитала могут быть переписаны как:

$$w_t = (1-\theta)A_t \left[\frac{K_t}{H_t}\right]^{\theta} \qquad r^k_t = \theta A_t \left[\frac{K_t}{H_t}\right]^{\theta-1} \tag{29}$$

[1] Домашнее задание: вывести условия первого порядка

$$\frac{1}{\beta} = (1-\delta) + \bar{r} \rightarrow \bar{r} \tag{30}$$

$$\frac{B}{\bar{w}} = -\frac{\beta}{\bar{g}\bar{C}} \tag{31}$$

$$\hat{p}\bar{C} = 1 \tag{32}$$

$$\frac{1}{\hat{p}} = (\bar{r}-\delta)\bar{K} + \bar{w}\bar{H} \tag{33}$$

$$\bar{w} = (1-\theta)\left[\frac{\bar{K}}{\bar{H}}\right]^{\theta} \tag{34}$$

$$\bar{r} = \theta\left[\frac{\bar{K}}{\bar{H}}\right]^{\theta-1} \tag{35}$$

$$\bar{w} = (1-\theta)\left[\frac{\bar{K}}{\bar{H}}\right]^{\theta} = (1-\theta)\left[\frac{\bar{r}}{\bar{\theta}}\right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \to \bar{w} \tag{36}$$

$$\bar{C} = -\frac{\beta\bar{w}}{\bar{g}B} \to \bar{C} \tag{37}$$

$$\hat{p} = \frac{1}{\bar{C}} \to \hat{p} \tag{38}$$

$$\bar{K} = \frac{\bar{C}}{\frac{\bar{r}}{\theta} - \delta} \to \bar{K} \tag{39}$$

$$\bar{H} = \left(\frac{\bar{r}}{\theta}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \bar{K} \to \bar{H} \tag{40}$$

$$\bar{Y} = \bar{C} + \delta K \to \bar{Y} \tag{41}$$

Стационарное состояние

При тех же значениях параметров, которые мы использовали прежде: $\beta = 0.99, \delta = 0.025, \theta = 0.36, \gamma = 1.72$, $h_0 = 0.583, B = -2.5805$. Для стационарное значения переменных оказываются равными:

Переменная	Значение
$\bar{r}$	0.0351
$\bar{w}$	2.3706
$\bar{C}$	$\frac{0.9095}{\bar{g}}$
$\hat{p}$	$1.0995\bar{g}$
$\bar{H}$	$\frac{0.3302}{\bar{g}}$
$\bar{Y}$	$\frac{1.2231}{\bar{g}}$

$$\frac{1}{\beta} = E_t \frac{w_t}{w_{t+1}}[(1-\delta) + r_{t+1}] \Rightarrow$$
$$-\tilde{w}_t = \beta E_t[\bar{r}(\tilde{r}_{t+1} - \tilde{w}_{t+1}) - (1-\delta)\tilde{w}_{t+1}] \tag{42}$$

$$\frac{B}{w_t \hat{p}_t} = -\beta E_t \frac{1}{\hat{p}_{t+1} c^i_{t+1} g_{t+1}} \Rightarrow -\frac{B}{\bar{C}\bar{w}}[\tilde{p}_t + \tilde{w}_t] = \frac{\beta}{\bar{g}} E_t g_{t+1} \tag{43}$$

$$\hat{p}_t c^i_t = \frac{\hat{m}^i_{t-1} + g_t - 1}{g_t} \Rightarrow \tilde{p}_t + \tilde{C}_t = 0 \tag{44}$$

$$k^i_{t+1} + \frac{\hat{m}^i_t}{\hat{p}_t} = (1-\delta)k^i_t + w_t h^i_t + r_t k^i_t \Rightarrow \bar{k}\tilde{k}_{t+1} +$$
$$+\frac{\bar{m}}{\bar{p}}[\tilde{m}_t - \tilde{p}_t] = \bar{w}\bar{h}[\tilde{w}_t + \tilde{h}_t] + \bar{r}\bar{k}[\tilde{r}_t + \tilde{k}_t] + (1-\delta)\bar{k}\tilde{k}_t \tag{45}$$

Логлинеаризация

$$
\begin{aligned}
w_t = (1-\theta)A_t\left[\frac{K_t}{H_t}\right]^{\theta} &\Rightarrow \\
\Rightarrow \tilde{w}_t = \tilde{A}_t + \theta(\tilde{K}_t - \tilde{H}_t &
\end{aligned} \tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
r_t = \theta A_t\left[\frac{K_t}{H_t}\right]^{\theta-1} &\Rightarrow \\
\Rightarrow \tilde{r}_t = \tilde{A}_t + (\theta-1)(\tilde{K}_t - \tilde{H}_t) &
\end{aligned} \tag{47}
$$

$$
H_t = h_t^i \Rightarrow \tilde{H}_t = \tilde{h}_t; K_{t+1} = k_{t+1}^i \Rightarrow \tilde{K}_t = \tilde{k}_t \tag{48}
$$

$$
\hat{M} = \hat{m}_t^i = 1 \Rightarrow \tilde{m}_t = 0 \tag{49}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln g_{t+1} &= (1-\phi)\ln\bar{g} + \phi\ln g_t + \varepsilon_{t+1}^{g} \Rightarrow \\
\tilde{g}_{t+1} &= \phi\tilde{g}_t + \varepsilon_{t+1}^{g}
\end{aligned} \tag{50}
$$

$$
\ln A_{t+1} = (1-\rho)ln\bar{A} + \rho\ln A_t + \varepsilon_{t+1}^{A} \Rightarrow \tag{51}
$$

$$
\Rightarrow \tilde{A}_{t+1} = \rho\tilde{A}_t + \varepsilon_{t+1}^{A} \tag{52}
$$

Полезно исключить часть переменных из модели и сократить число переменных, входящих в модель со знаком матожидания. Например, с использованием процесса для роста денежного предложения:

$$\tilde{g}_{t+1} = \phi \tilde{g}_t + \varepsilon^{g}_{t+1} \tag{53}$$

уравнение:

$$-\frac{B}{\bar{C}\bar{w}}[\tilde{p}_t + \tilde{w}_t] = \beta E_t \left[\frac{1}{\bar{g}} \tilde{g}_{t+1} \right] \tag{54}$$

может быть записано в виде:

$$-\frac{B}{\bar{C}\bar{w}}[\tilde{p}_t + \tilde{w}_t] = \frac{\beta\phi}{\bar{g}} \tilde{g}_t \tag{55}$$

Система содержит 4 уравнения без матожидания:

$$\bar{K}\tilde{K}_{t+1} - \frac{1}{\bar{p}}\tilde{p}_t - \bar{w}\bar{H}\tilde{H}_t - \bar{r}\bar{K}\tilde{r}_t - \bar{r}\bar{K}\tilde{K}_t - (1-\delta)\bar{K}\tilde{K}_t = 0 \quad (56)$$

$$\tilde{r}_t - \tilde{A}_t - (\theta - 1)\tilde{K}_t + (\theta - 1)\tilde{H}_t = 0 \quad (57)$$

$$\tilde{w}_t - \tilde{A}_t - \theta\tilde{K}_t + \theta\tilde{H}_t = 0 \quad (58)$$

$$\tilde{p}_t + \tilde{w}_t - \phi\tilde{g}_t = 0 \quad (59)$$

Одно уравнение с матожиданием:

$$\tilde{w}_t + \beta \bar{r} E_t \tilde{r}_{t+1} - E_t w_{t+1} = 0 \qquad (60)$$

И два случайных процесса для шока технологии и предложения денег:

$$\tilde{A}_{t+1} = \rho \tilde{A}_t + \varepsilon^A_{t+1} \qquad (61)$$

$$\tilde{g}_{t+1} = \phi \tilde{g}_t + \varepsilon^g_{t+1} \qquad (62)$$

Решение метод неопределенных коэффициентов

Запишем систему в форме:

$$Ax_t + Bx_{t-1} + Cy_t + Dz_t = 0 \tag{63}$$

$$\begin{aligned} E_t[Fx_{t+1} + Gx_t + Hx_{t-1} + Jy_{t+1} + \\ + Ky_t + Lz_{t+1} + Mz_t] = 0 \end{aligned} \tag{64}$$

$$z_{t+1} = Nz_t + \varepsilon_{t+1}, \quad E_t(\varepsilon_{t+1}) = 0, \tag{65}$$

где $x_t = [\tilde{K}_{t+1}]'$, $\quad y_t = [\tilde{r}_t \quad \tilde{w}_t \quad \tilde{H}_t \quad \tilde{p}_t]'$, $\quad z_t = [\tilde{A}_t, \tilde{g}_t]'$

В нашем случае матрицы имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} \bar{K} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}', \tag{66}$$

$$B = \begin{bmatrix} -(\bar{r}+1-\delta)\bar{K} & 1-\theta & -\theta & 0 \end{bmatrix}', \tag{67}$$

$$C = \begin{bmatrix} \bar{r}\bar{K} & -\bar{w}\bar{H} & -\bar{w}\bar{H} & -\frac{1}{\bar{P}} \\ 1 & 0 & \theta-1 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{68}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix}', \tag{69}$$

$$F = [0] \quad G = [0] \quad H = [0] \tag{70}$$

$$J = \begin{bmatrix} \beta\bar{r} & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{71}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{72}$$

$$L = [0 \quad 0] \tag{73}$$

$$M = [0 \quad 0] \tag{74}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \phi \end{bmatrix}, \tag{75}$$

$$\tag{76}$$

Решением для этой экономики является набор матриц P, Q, R, S, описывающих уравнения динамики:

$$x_{t+1} = Px_t + Qz_t \tag{77}$$

$$y_t = Rx_t + Sz_t \tag{78}$$

Находим решение в соответствии с формулами (60)-(65) из Лекции 4:

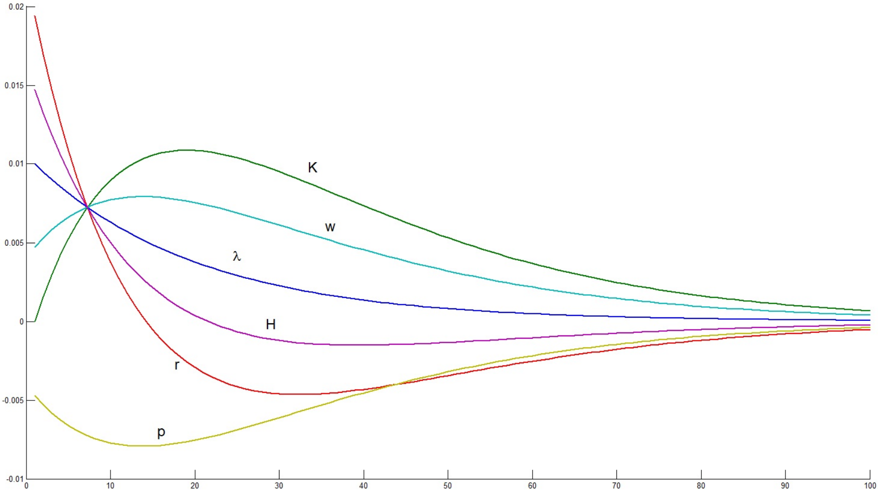
$$P = [0.9418] \tag{79}$$

$$Q = [0.1552 \quad 0.0271] \tag{80}$$

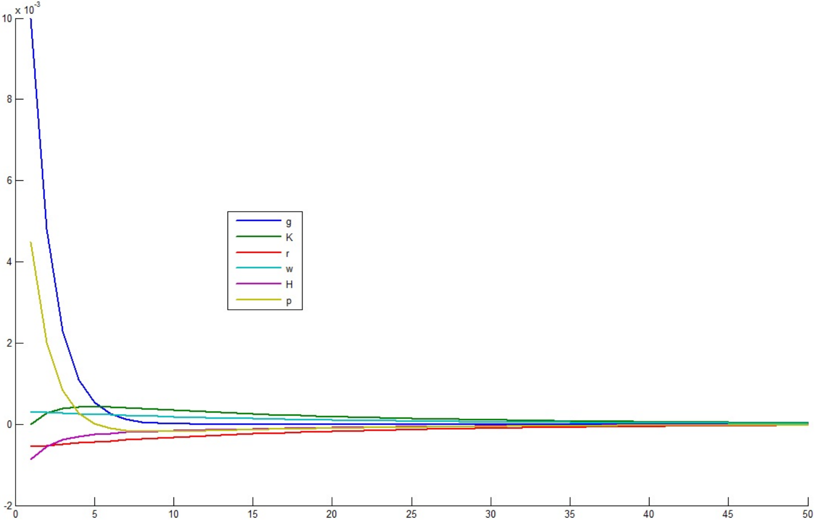
$$R = \begin{bmatrix} -0.9450 \\ 0.5316 \\ -0.4766 \\ -0.5316 \end{bmatrix} \tag{81}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1.9418 & -0.0555 \\ 0.4703 & 0.0312 \\ 1.4715 & -0.0867 \\ -0.4703 & 0.4488 \end{bmatrix} \tag{82}$$

IRF для базовой CIA-модели(1)



IRF для базовой CIA-модели(2)



Выводы по IRF

1. Реакция экономики на технологический шок точно такая же, как в базовой модели Хансена с неделимым трудом
2. На монетарный шок очень быстро и сильно реагируют цены
3. В случае относительно низкой персистентности монетарного шока, влияние шока перестает действовать очень быстро
4. Монетарный шок имеет влияние на реальные показатели, но это влияние слабое.

Литература

Основная литература:

- McCandless, G. The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic models, Harvard University Press, 2008, ch 8