

תרגול 3

אוטומט סופי לא דטרמיניסטי

אוטומטים ושפות פורמליות

בר אילן תשעז 2017

עקיבא קליינרמן

הגדרה

אוטומט סופי לא דטרמיניסטי מוגדר ע"י החמישייה: $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$
כאשר:

כמו באס"ד

$\Sigma =$ א"ב שפת הקלט

$Q =$ קבוצה סופית לא ריקה של מצבים

$q_0 =$ מצב התחלתי

$F =$ קבוצת מצבים מקבילים (תת קבוצה של Q)

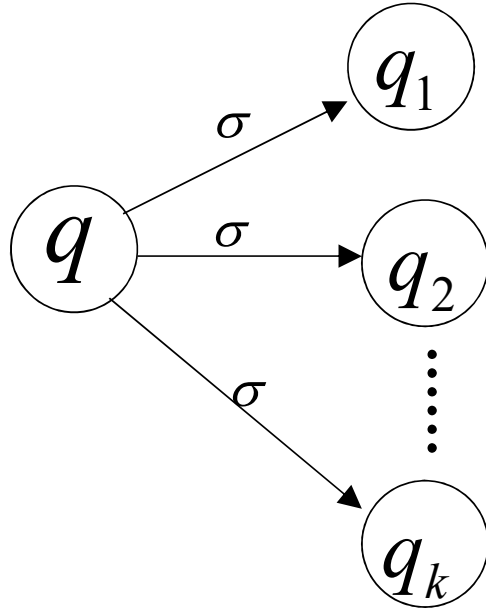
$\delta =$ פונקציית מעברים

פונקציית המעברים באסל"ד (ללא מעברי ε)

כל תתי הקבוצות של Q

פונקציית המעברים δ מוגדרת כך: $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$

כלומר הפונקציה מקבלת כקלט מצב ואות מהא"ב ומחזירה קבוצת מצבים מתוך Q . מכיוון שהאוטומט לא דטרמיניסטי, עבור מצב $q \in F$ ואות $\sigma \in \Sigma$ יכולים להיות מאפס עד $|Q|$ מעברים אפשריים.



$$\delta(q, \sigma) = \{q_1, q_2, \dots, q_k\} \text{עבור:}$$

נצייר בתרשים:

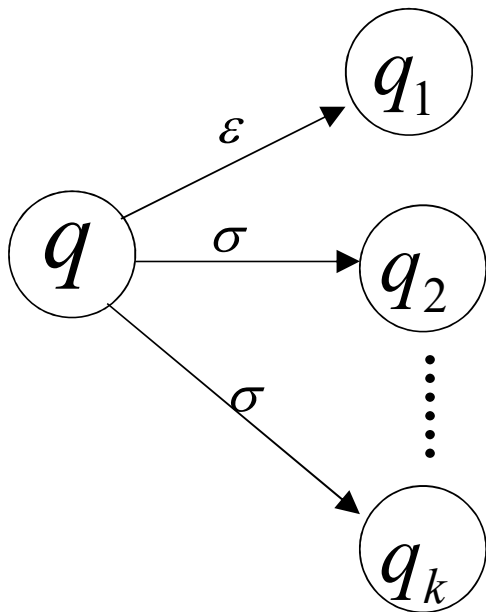
הרחבה למילים

ההרחבה של δ למילים מוגדרת כך: $\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$

כלומר, הפונקציה מקבלת כקלט מצב ומילה מאותיות הא"ב ומחזירה את כל המצבים שניתן להגיע אליהן בקריאת המילה.

מעברי ε (או מסע ε)

מעבר בין מצב למצב אחר ללא קריאת אות.
כלומר, $\delta(q, \varepsilon) = p$ (כאשר $p \neq q$) הינו מעבר ε .



$$\delta(q, \sigma) = \{q_2, q_3 \dots, q_k\}$$

$$\delta(q, \varepsilon) = \{q_1\}$$

המשך מעברי ε

ניתן להמיר בפשטות כל אסל"ד עם מעברי ε לאסל"ד שקול ללא מעברי ε . נוריד את המעבר ונאחד את שני המצבים שהוא מחבר ביניהם.

באסל"ד עם מעברי אפסילון, הגדרת פונקציית המעברים שונה מעט:

$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q.$$

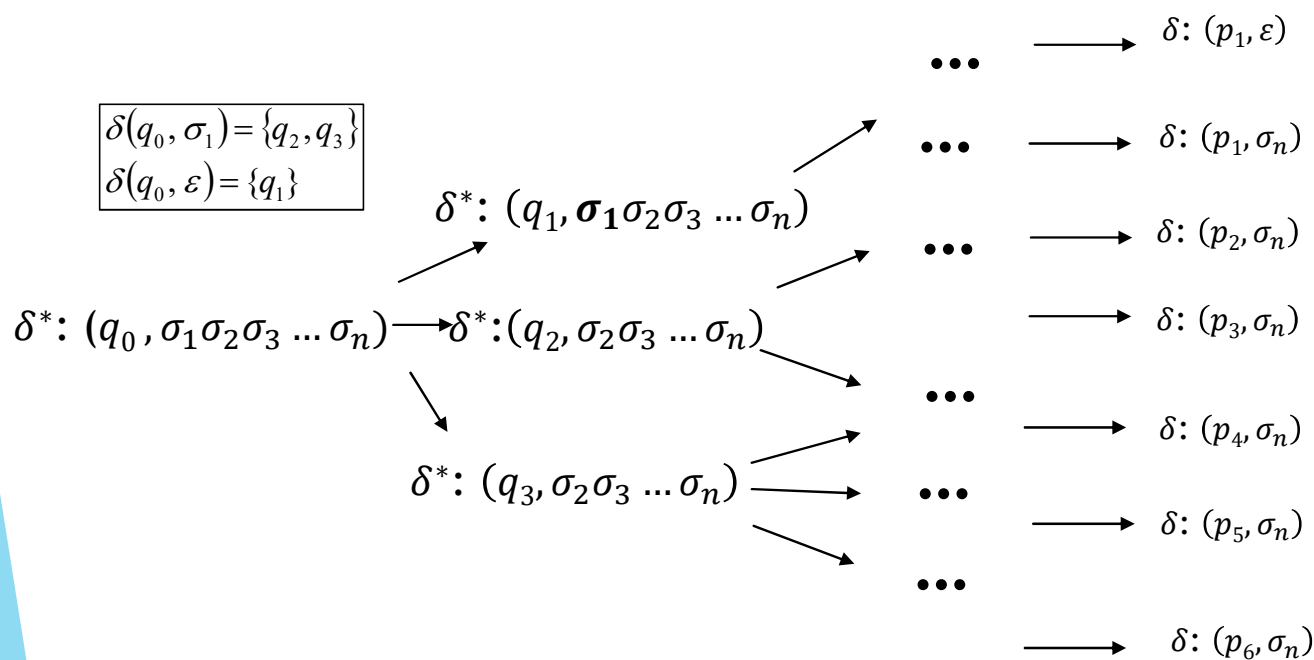
בהתאם, $\delta^*(q, w)$ יהיה אוסף כל המצבים שניתן להגיע אליהם מ- q לאחר קריאת המילה w תוך התחשבות בכל המעברים האפשריים, כולל מעברי אפסילון.

שפת האוטומט

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}, \text{ יהי } A \text{ אסל"ד,}$$

כלומר: אוסף המילים שעבורן קיים חישוב (ריצה על האוטומט) המסתיים במצב מקבל.

$$w = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_n$$



אם אחד מהמצבים מתוך כל המצבים שפונקציית המעברים מחזירה שייכת לF, כלומר $\delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$

אז מתקיים $w \in L(A)$

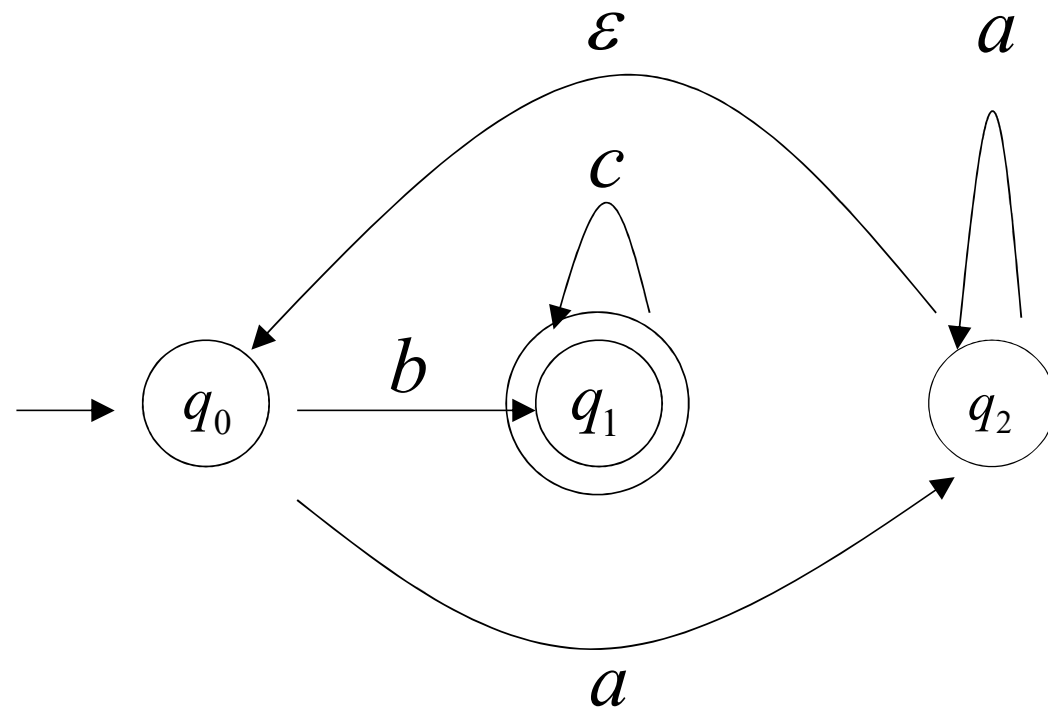
סיכום ההבדלים בין אס"ד לאסל"ד

(1) באסל"ד לא חובה לתת פונקצית מעברים מלאה לכל מצב.

(2) באסל"ד ניתן להגדיר מעברי ε , בהם המעבר נעשה ללא קריאת תו.

(3) באסל"ד ניתן להגדיר עבור מצב ואות מסויימים מס' מעברים (כלומר מעברים למצבים שונים)

דוגמא לאסל"ד



$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

מהי שפת האסל"ד?

כיצד ניתן ליצור אוטומט עבור השפה L עם פחות מצבים?

דוגמא

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

תהא $L = \{w1 \mid w \in \Sigma^*\}$

(א) בנה אס"ד המקבל את L .

(ב) בנה אסל"ד המקבל את L .

תרגיל

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$L = \{w \mid \#_a(w) \bmod 2 = 1 \vee \#_b(w) \bmod 3 \neq 0\}$$

בנה אסל"ד לשפה הבאה:

שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a, b\}$ כך שמספר אותיות הא' אי זוגי או שמספר אותיות הב' לא מתחלק בשלוש (או שניהם).

אס"ד שקול לאסל"ד

משפט: יהי A אסל"ד, אזי קיים אס"ד A' כך ש
 $L(A) = L(A')$

נראה מיד את אלגוריתם להמרת האסל"ד באס"ד שקול, יש להעיר שהבנייה שנראה אינה מבטיחה מספר מינימלי של מצבים.

סגור-אפסילון epsilon closure

epsilon closure - קבוצת כל המצבים שניתן להגיע אליהם ממצב מסוים ללא קריאת אות. כלומר, קבוצת המצבים שניתן להגיע אליהם ע"י מעברי אפסילון יחד עם המצב עצמו.

$$Cl^\epsilon: Q \rightarrow 2^Q$$

כמו כן ניתן להגדיר סגור אפסילון עבור קבוצת מצבים P , הסגור יהיה כל המצבים שניתן להגיע אליהם מקבוצת המצבים P ללא קריאת אות:

$$Cl^\epsilon: 2^Q \rightarrow 2^Q$$

$$Cl^\epsilon(P) = \bigcup_{q \in P} Cl^\epsilon(q)$$

אלגוריתם להמרת אסל"ד באס"ד שקול

האלגוריתם להמרת אסל"ד באס"ד נקרא "Power Set Costruction" (בניית קבוצת החזקה). נמיר אסל"ד באס"ד ע"י הצעדים הבאים:

1. כל מצב באס"ד יהיה תת קבוצה של מצבים מהאסל"ד.

חשוב להדגיש: קבוצת המצבים היא רק **השם** של הקבוצה, שם הקבוצה נועד להקל בהמשך הבנייה. לכל מצב באס"ד החדש נקרא קבוצה של מצבים מהאסל"ד.

2. המצב ההתחלתי באס"ד יהיה קבוצה עם האיבר ההתחלתי באסל"ד בלבד: $\{q_0\}$

אלגוריתם להמרת אסל"ד באס"ד שקול

3. נבנה את שאר המצבים יחד עם פונקציית המעברים באופן הבא:

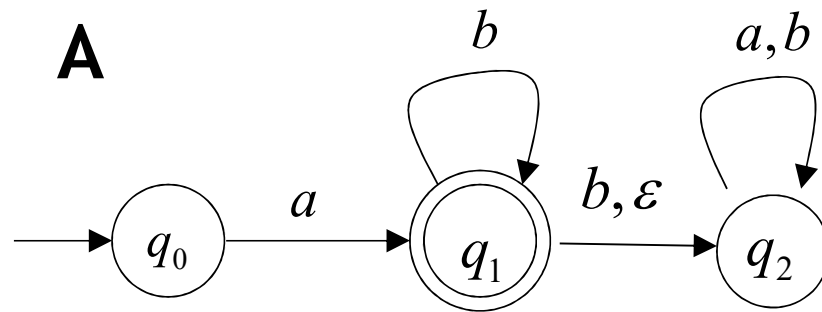
נתחיל מהמצב q_0 : עבור כל אות σ ב Σ נבדוק מהם המצבים שניתן להגיע אליהם יחד עם הסגור אפסילון, כלומר $Cl^\epsilon(\delta: (q, \sigma))$, ובהתאם נגדיר מעבר יחיד עבור σ למצב יחיד ששמו יהיה קבוצת המצבים זאת. אם עבור אות מסוימת קבוצת המצבים ריקה-נגדיר עבורה מעבר למצב בור.

כעת, עבור כל מצב חדש $q' = \{q_1, q_2 \dots q_n\}$ ועבור כל אות σ ב Σ , נבדוק מהן קבוצת המצבים שניתן להגיע מכל אחד מהמצבים $q_1, q_2 \dots q_n$, נאחד את כל המצבים יחד עם הסגור אפסילון שלהם וניצור מהם מצב חדש עבור המעבר של σ . במקרה שכבר קיים מצב ב A' עם קבוצת מצבים זאת, המעבר יהיה אל מצב זה.

4. המצבים המקבלים יהיו כל מצב שמכיל לפחות מצב אחד מקבל ב A .

בנוסף, אם המילה הריקה שייכת לשפה של האסל"ד, נוסיף את q_0 בקבוצת המצבים המקבלים.

דוגמא להמרת אסל"ד באס"ד



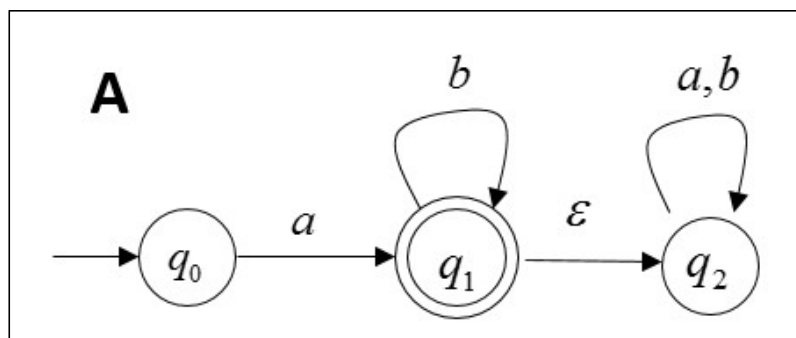
יהי האסל"ד A המתואר בתרשים:

מהי שפת האסל"ד?

$$L = \{ab^j \mid j \geq 0\}$$

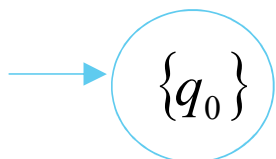
המרת אסל"ד באס"ד

אסל"ד



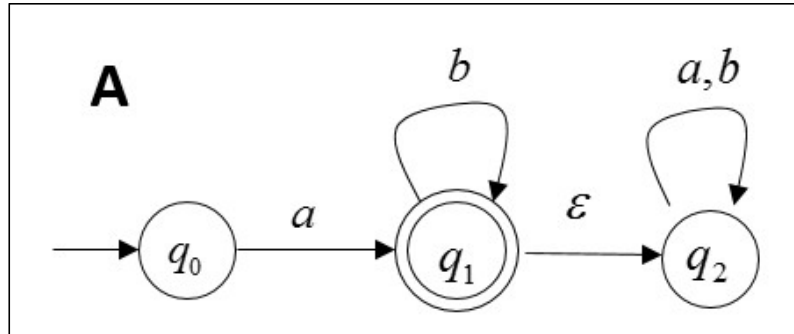
A'

אס"ד

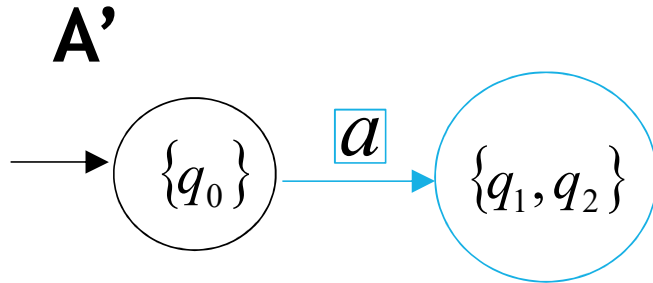


המרת אסל"ד באס"ד

אסל"ד



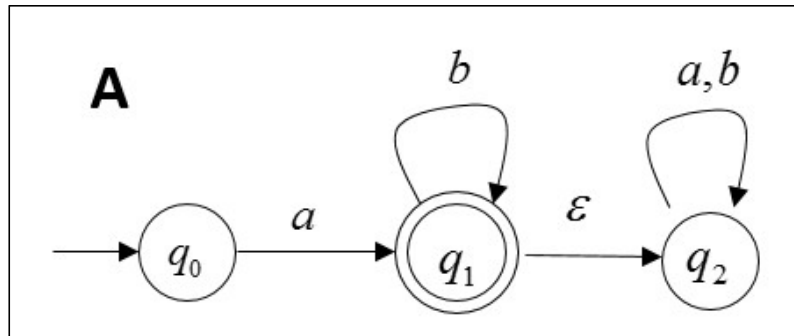
אס"ד



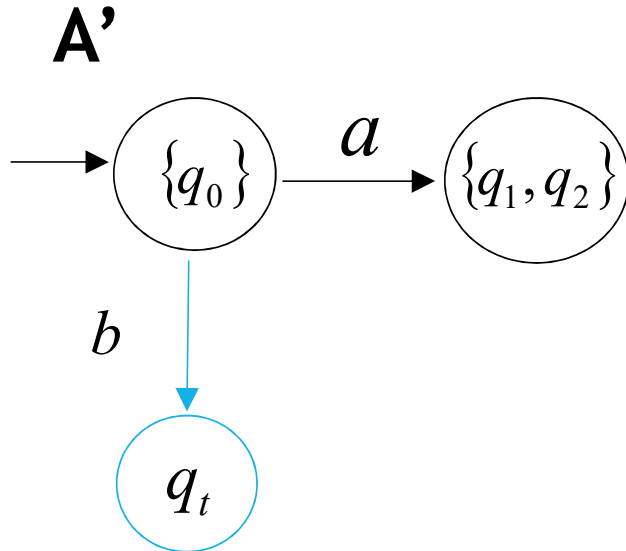
$$\hat{\delta}(q_0, a) = \{q_1, q_2\}$$

המרת אסל"ד באס"ד

אסל"ד



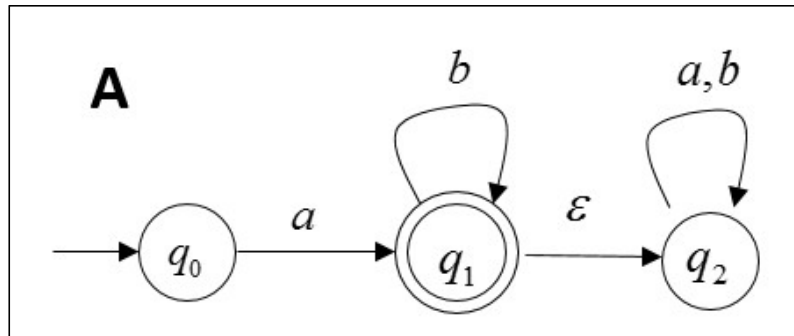
אסל"ד



$$\hat{\delta}(q_0, b) = \emptyset$$

המרת אסל"ד באס"ד

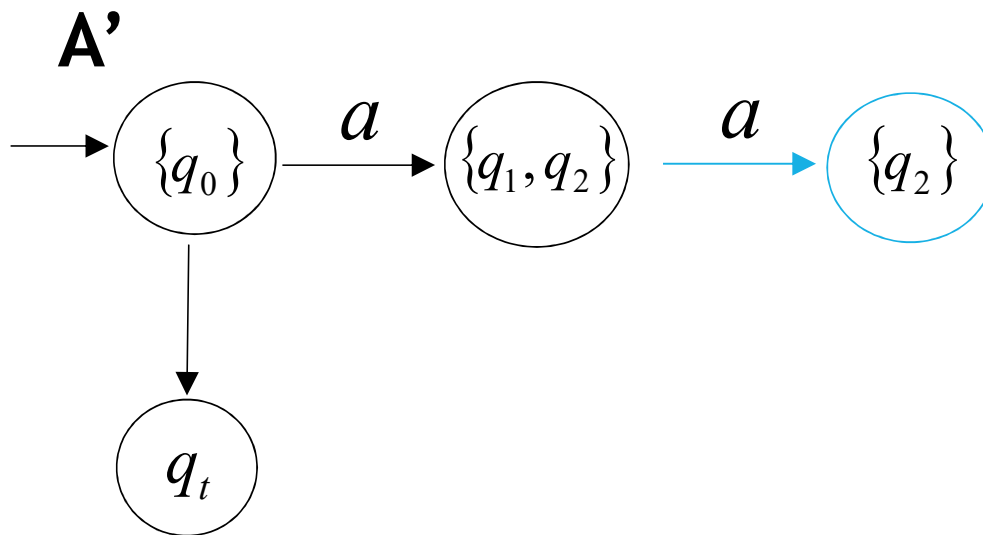
אסל"ד



$$\hat{\delta}(q_1, a) = \emptyset$$

$$\hat{\delta}(q_2, a) = \{q_2\}$$

אס"ד

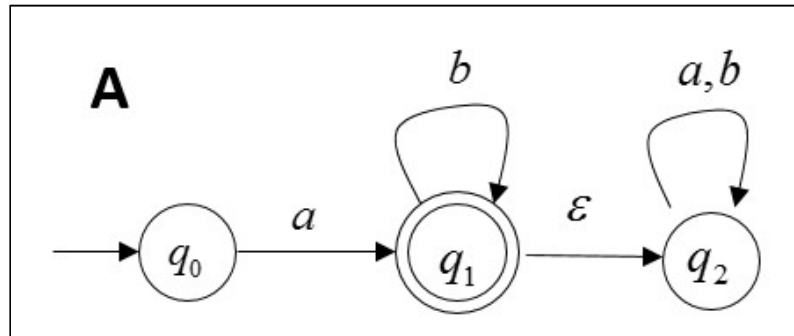


איחוד

$\{q_2\}$

המרת אסל"ד באס"ד

אסל"ד



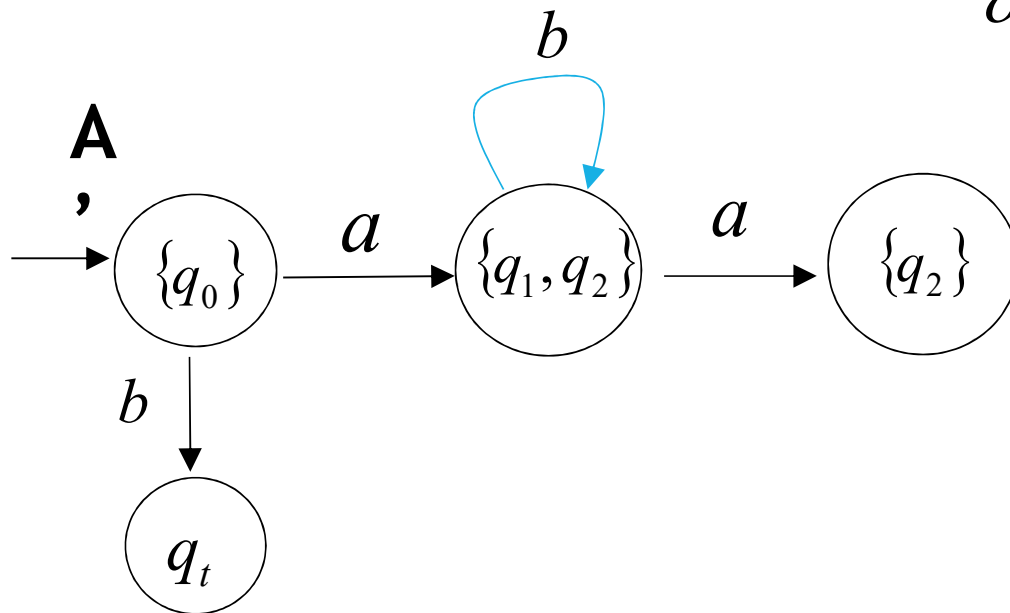
$$\hat{\delta}(q_1, b) = \{q_1, q_2\}$$

$$\hat{\delta}(q_2, b) = \{q_2\}$$

איחוד

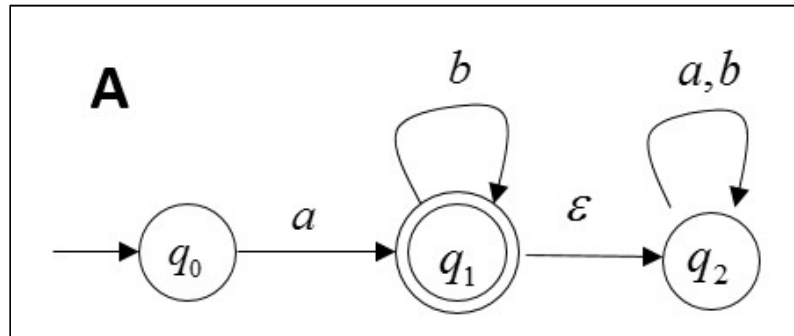
$$\{q_1, q_2\}$$

אס"ד



המרת אסל"ד באס"ד

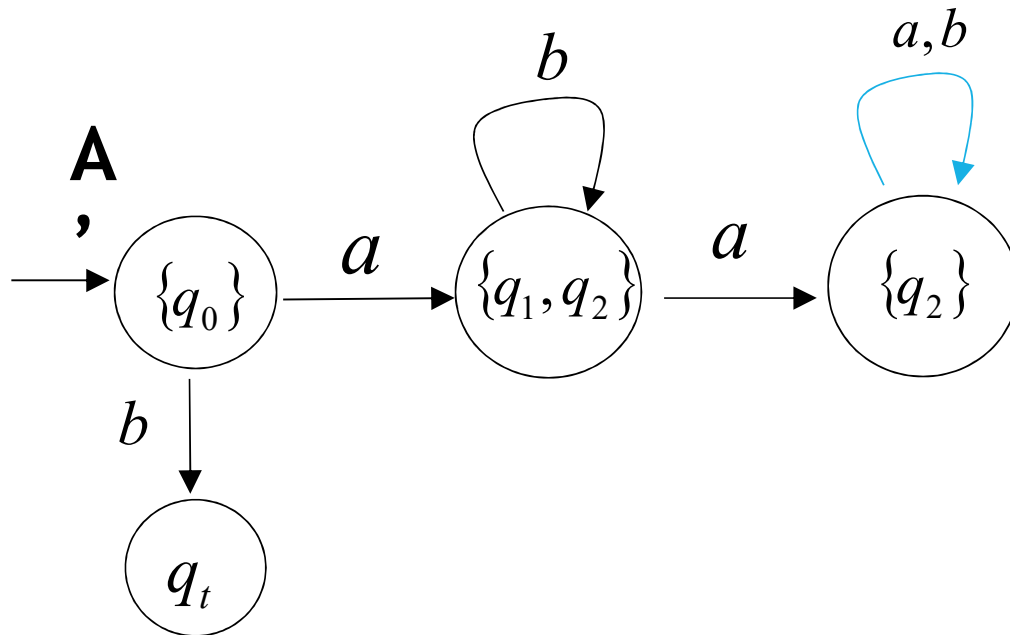
אסל"ד



$$\hat{\delta}(q_2, a) = \{q_2\}$$

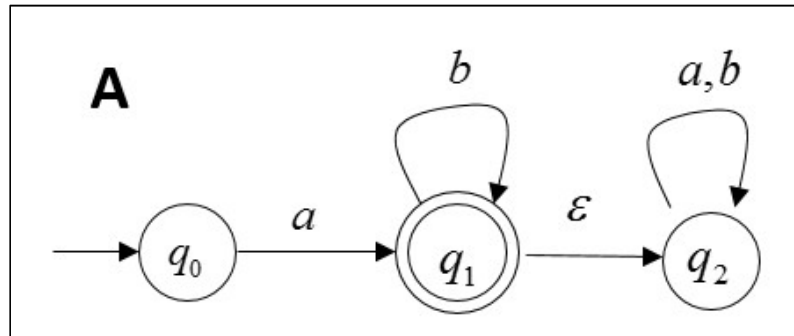
$$\hat{\delta}(q_2, b) = \{q_2\}$$

אס"ד

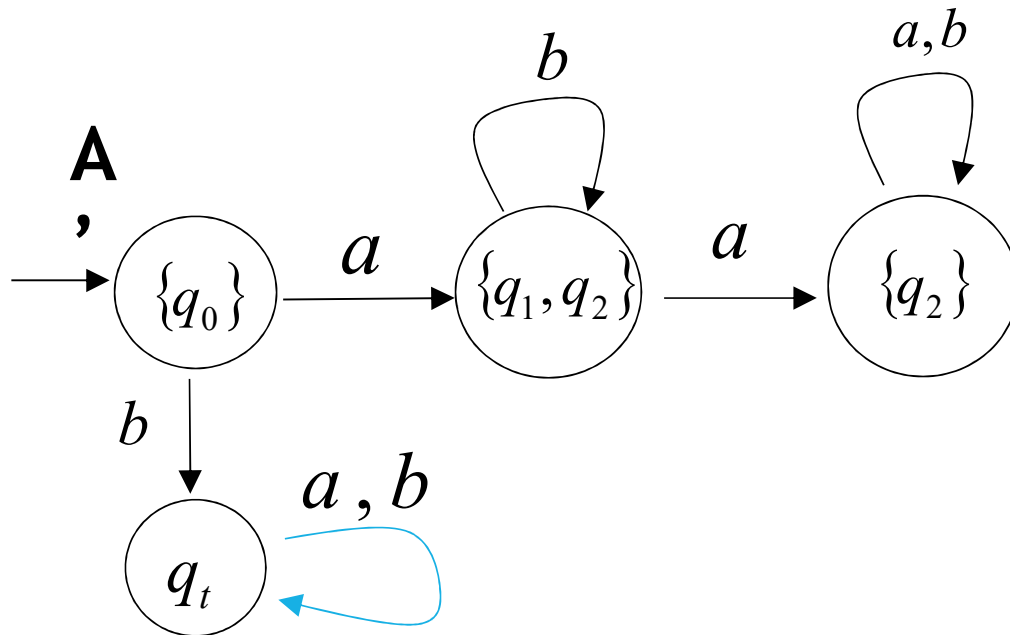


המרת אסל"ד באס"ד

אסל"ד



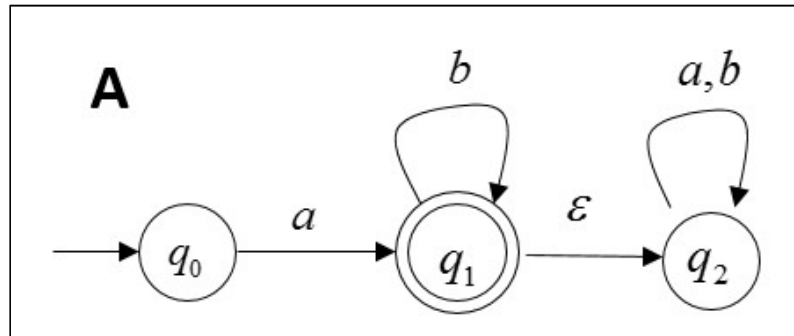
אס"ד



בור (מצב מלכודת)

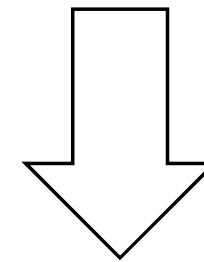
המרת אסל"ד באס"ד

אסל"ד



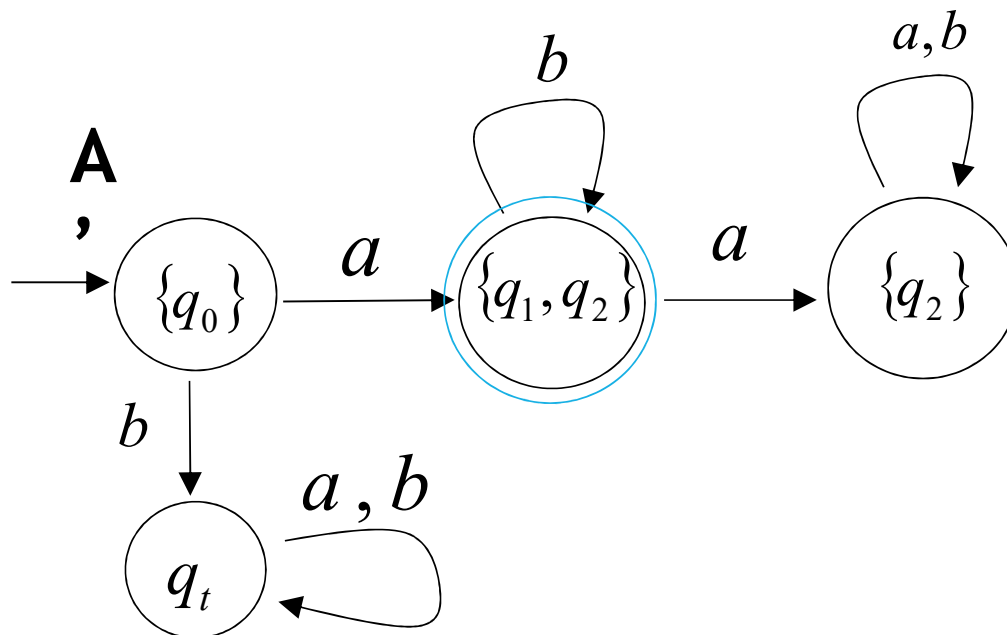
מצבים מקבלים:

$$q_1 \in F$$



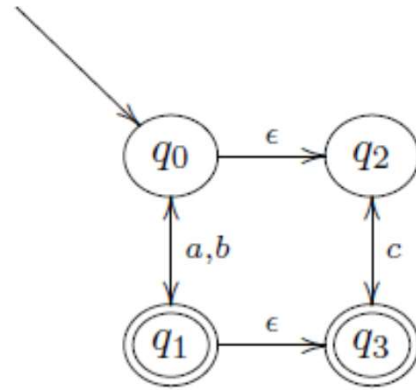
$$\{q_1, q_2\} \in F'$$

אס"ד



תרגיל

בנו אס"ד שקול לאסל"ד הבא:



פתרון: