

תרגיל 4 שאלה 2- מפורט

סגירות שפות תלויות הקשר

2. (30 נקודות)

- א. הוכיחו ששפות תלויות הקשר סגורות לקליני. כלומר, הוכיחו שאם L_1 תלוית הקשר אז גם L_1^* היא תלוית הקשר.
- ב. הוכיחו ששפות תלויות הקשר סגורות לשרשור. כלומר, הוכיחו שאם L_1 וגם L_2 הן תלויות הקשר אז גם $L_1 \cdot L_2$ תלוית הקשר.
- הדרכה:** בהרצאה ראיתם הוכחה לסגירות לאיחוד, הוכיחו באופן דומה להוכחה שראיתם בהרצאה. אפשר גם להוכיח בעזרת מכונת טיורינג.

פתרון:

תחילה אכתוב את עיקר ההוכחה ע"י דקדוק, אח"כ אתיחס לשתי בעיות בהוכחה ולפתרונות אפשריים לבעיות. בתשובות נקבל תשובה עם עיקר ההוכחה גם ללא התייחסות לבעיות. בסוף יש הסבר קצר מאוד על רעיון ההוכחה ע"י מכונת טיורינג.

שימו לב, בכדי להראות ששפה מסוימת L היא תלוית הקשר, מספיק להראות דקדוק G ש $L(G) = L - \{\epsilon\}$

א. תהי L_1 שפה תלוית הקשר, אז ע"פ המשפט קיים דקדוק תלוי הקשר $G = \{\Sigma, V, S, \Pi\}$ כך ש $L(G) = L_1 - \{\epsilon\}$

נגדיר דקדוק תלוי הקשר חדש $G' = \{\Sigma', V', S', \Pi'\}$.

הדקדוק יהיה כמעט זהה לדקדוק G . S' יהיה משתנה התחלתי חדש.

$$\Sigma' = \Sigma$$

$$V' = V \cup \{S'\}$$

$$\Pi' = \Pi \cup \{S' \rightarrow SS' | S\}$$

קל להוכיח שכל מילה ששייכת לקליני של L_1^* חוץ מהמילה הריקה היא בשפת הדקדוק החדש (הצד השני הוא בעייתי כפי שאסביר בהמשך).

ב. תהי L_1 שפה תלוית הקשר ו L_2 שפה תלוית הקשר, אז ע"פ המשפט קיימים דקדוקים תלויי הקשר

$$G_1 = \{\Sigma_1, V_1, S_1, \Pi_1\} \text{ כך ש } L(G_1) = L_1 - \{\epsilon\} \quad \vee \quad G_2 = \{\Sigma_2, V_2, S_2, \Pi_2\} \text{ כך ש } L(G_2) = L_2 - \{\epsilon\}$$

נגדיר דקדוק תלוי הקשר חדש $G' = \{\Sigma', V', S', \Pi'\}$.

S' יהיה משתנה התחלתי חדש. שאר המשתנים יוגדרו כך:

$$\Sigma' = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

$$V' = V_1 \cup V_2 \cup \{S'\}$$

$$\Pi' = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \{S' \rightarrow S_1 S_2\}$$

בעיה 1 (לגבי שרשור, סעיף ב'):

אם השפה L_1 מכילה את המילה הריקה, אז כל המילים ב L_2 שייכות לשרשור השפות $L_1 \cdot L_2$. אבל מכיוון ש $L(G1)$ אינה מכילה את המילה הריקה, הדקדוק החדש שהגדרנו לא יקיים את הדרישה.

לכן, בשביל שלמות ההוכחה צריך להוסיף:

אם $\varepsilon \in L_1$

$$\Pi' = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \{S' \rightarrow S_1 S_2 | S_2\}$$

אחרת, אם $\varepsilon \in L_2$

$$\Pi' = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \{S' \rightarrow S_1 S_2 | S_1\}$$

אחרת (שתי השפות לא מכילות את המילה הריקה):

$$\Pi' = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \{S' \rightarrow S_1 S_2\}$$

כעת קל להוכיח שכל מילה ששייכת ל $L_1 \cdot L_2$ חוץ מהמילה הריקה היא בשפת הדקדוק החדש.

ניתן ניקוד מלא גם למי שלא התייחס למילה הריקה, הסתפקנו ברעיון ההוכחה, אך צריך לשים לב שזה הכרחי בשביל שלמות ההוכחה.

בעיה 2 (לגבי שרשור, אבל גם שייך בקליני):

הערה: בכדי לקצר, מעתה והלאה "הגזירה של S_1 " = טרמינלים ומשתנים שנגזרו מ S_1 ע"י סדרה של גזירות מכללי הדקדוק של G^1 .

אם נגדיר באופן זה את כללי הגזירה, יתכן שיש כללי גזירה ב Π_1 , או ב Π_2 , שנוכל להפעיל על רישא של הגזירה של S_1 וסיפא של הגזירה של S_2 (במהלך ההפקה של כל מילה מהדקדוק, הגזירה של S_1 תהיה משמאל ובסמוך לגזירה של S_2 ולכן אפשר לגזור משתי הגזירות יחד) כך נוכל ליצור מילים שאינן בשרשור של שתי השפות. כלומר, הדקדוק לעיל יכול בפועל ליצור יותר מילים מהשרשור של שתי השפות, ולכן הוא לא דקדוק תקין עבור השרשור.

דוגמא:

נניח שיש לנו את שני הדקדוקים הבאים:

$$\begin{array}{l} S_1 \rightarrow aBa \\ G^1: Ba \rightarrow aa \\ BaB \rightarrow bbb \\ \\ S_2 \rightarrow Bba \\ G^2: B \rightarrow bb \end{array}$$

אז ע"פ ההוכחה לעיל הדקדוק עבור שרשור שתי השפות הוא:

$$\begin{array}{l} S \rightarrow S_1 S_2 \\ S_1 \rightarrow aBa \quad S_2 \rightarrow Bba \\ Ba \rightarrow aa \quad B \rightarrow bb \\ BaB \rightarrow bbb \end{array}$$

דקדוק זה הוא בעייתי בגלל שהוא יוכל ליצור מילים שאינן בשרשור של שתי השפות, לדוגמא:

$$S \Rightarrow S_1 S_2 \Rightarrow aBaS_2 \Rightarrow aBaS_2 \Rightarrow aBaBba \Rightarrow abbbba$$

קיבלנו מילה שהיא לא בשרשור של שתי השפות (המילה היחידה של $G1$ יכול לגזור היא 'aaa' והמילה היחידה שניתן לגזור מ $G2$ היא 'bbba')¹.

הצעה לפתרון:

הרעיון הוא ליצור דקדוק חדש כך ש:

1. לא יהיו כלל גזירה שיוכל להפיק מטרמינלים, כלומר בצד שמאל של כל כלל גזירה יהיו משתנים בלבד.
2. לוודא שהמשתנים ב $G1$ שונים מהמשתנים ב $G2$ ואם לא להחליף את שמות המשתנים כדי שיתקיים $V1 \cap V2 = \emptyset$.

כך בכל שלב של הגזירה, לא יתכן כלל גזירה שישתמש בגזירה של $G1$ והגזירה של $G2$ יחד (כיוון שבדקדוק החדש ניתן לגזור רק ממשותנים, והמשתנים של כל אחת מהגזירות שונים).

קודם כל, נקרא למשתנים שמופיעים בשני הדקדוקים בשמות שונים, למשל בדוגמא למעלה למשתנה B של $G1$ נקרא B_1 ולמשתנה B של $G2$ נקרא B_2

עבור כל אות בא"ב, למשל a , ניצור שני משתנים חדשים, אחד עבור כל דקדוק:

$$V_1^a, V_2^a$$

כל אחד מהמשתנים יפיק את האות שלו בלבד:

$$V_1^a \rightarrow a$$

$$V_2^a \rightarrow a$$

נחליף את כל הטרמינלים והמשתנים בדקדוקים המקוריים למשתנים החדשים שהגדרנו. למשל בדוגמא שהבאתי למעלה, הדקדוק החדש שלנו יראה כך:

$$S \rightarrow S_1 S_2 \quad \begin{array}{l} S_1 \rightarrow V_1^a B_1 V_1^a \\ B_1 V_1^a \rightarrow V_1^a V_1^a \\ B_1 V_1^a B_1 \rightarrow V_1^b V_1^b V_1^b \end{array} \quad \begin{array}{l} S_2 \rightarrow B_2 V_2^b V_2^a \\ B_2 \rightarrow V_2^b V_2^b \end{array} \quad \begin{array}{ll} V_1^a \rightarrow a & V_1^b \rightarrow b \\ V_2^a \rightarrow a & V_2^b \rightarrow b \end{array}$$

באופן זה, כל עוד לא נגזרו הטרמינלים, המשתנים של שני הדקדוקים הם זרים ולכן לא יתכן כלל דקדוק שישתמש במשתנים מהגזירה של $G1$ וגם של $G2$. לאחר שיופקו הטרמינלים, אי אפשר להמשיך ולהפיק מהם (כיוון שבדקדוק החדש אין שום כלל עם טרמינל בצד שמאל) ולכן שוב לא יתכן שיופעל כלל גזירה שמשמש בחלקים של שתי הגזירות. כעת ניתן להוכיח בקלות שהדקדוק החדש שיצרנו יכול להפיק כל

¹ אין בעיה כזאת בהוכחה של שרשור שפות ח"ה כיוון שבדקדוק ח"ה הצד השמאלי של הכלל הוא תמיד משתנה יחיד, כך שלא ניתן להשתמש בשתי הגזירות בכלל אחד.

מילה בשרשור שתי השפות (שימו לב שלמעשה לא שינינו את הדקדוקים $G1$ ו $G2$, רק החלפנו את השמות של המשתנים הקיימים והמשתנים החדשים שקולים לטרמינלים).

גם בקליני אפשר לפתור את הבעיה באופן דומה. אסביר בקצרה.

אומנם כאן זה שרשור אינסופי אבל ניתן להגדיר משתנים מיוחדים עבור גזירה **זוגית** של משתנה התחלתי ומשתנים מיוחדים עבור גזירה **אי-זוגית** של משתנה התחלתי. באופן זה ניצור שני דקדוקים זהים מלבד שמות המשתנים: דקדוק עבור גזירה זוגית ודקדוק עבור גזירה אי זוגית (אנחנו לא צריכים שכל המשתנים בכל הגזירות יהיו זרים, מספיק שכל שתי גזירות סמוכות אחת לשנייה יהיו זרים במשתנים שלהם).

אח"כ נגדיר כללי הגזירה עבור השרשור:

$$S^{odd} \rightarrow S^{odd} S^{even} | S^{odd}$$

$$S^{even} \rightarrow S^{even} S^{odd} | S^{even}$$

כאשר S^{odd} יהיה המשתנה ההתחלתי. באופן זה כל כללי הגזירה יופעלו רק על משתנים "זוגיים" או רק "אי זוגיים" ולכן לעולם לא תהיה הפקה שתוכל להפיק משתי גזירות סמוכות יחד.

רעיון ההוכחה ע"י מכונת טיורינג (ממש בקצרה):

עבור כל שפה ת"ה קיימת מכונת טיורינג חסומה ליניארית שמקבל אותה. רעיון ההוכחה בשרשור: יהיו L_1 ו L_2 שפות תלויות הקשר, אזי קיימות מכונות טיורינג חסומות לינארית M_1, M_2 ששפתם L_1 ו L_2 בהתאמה. ניצור מכונה חדשה שעבור כל חלוקה של הקלט לשתיים המכונה תריץ את M_1 על תחילת הקלט ואת M_2 על סוף הקלט. אם באחת החלוקות- שתי הריצות הגיעו למצב מקבל- המכונה מקבלת, אחרת- דוחה. ההסבר המפורט של האלגוריתם הוא מאוד ארוך ולא נדרש, מספיק להסביר את הנכונות ומדוע המכונה החדשה היא מכונת טיורינג חסומה ליניארית.

בקליני העיקרון הוא דומה, מחלקים את הקלט בכל חלוקה אפשרית ומריצים את המכונה על כל אחד מהמקטעים בנפרד ואם כולם הגיעו למצב מקבל- מקבלת, אחרת- דוחה.