

מבחן אמצע סמסטר- גרפיקה ממוחשבת

מרצה: ד"ר יעקב הל-אור

זמן בחינה: 1.5 שעות

ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

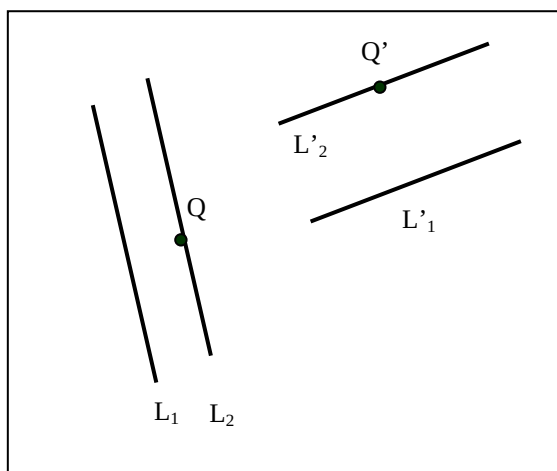
- לכל שאלה ניקוד זהה, אך חלוקת הניקוד לסעיפים השונים לא בהכרח זהה.
- הבחינה עם חומר סגור.
- בכל השאלות אין צורך לפתוח ביטויים. תשובות עד כדי הכפלה, הפיכת מטריצה, פתיחת סוגריים וכד' יתקבלו. בכל התשובות יש לספק ביטויים ולא הסברים כלליים.

1. נתונה טרנספורמציה אפינית דו-מימדית המיוצגת על-ידי מטריצה A (במיד 2×2) ווקטור T (במיד 2×1).
טרנספורמציה זו מעבירה כל נקודה P במישור לנקודה חדשה $P' = AP + T$.

א. הוכח כי אם מפעילים את הטרנספורמציה הנ"ל על כל ווקטור V במישור (ולא על נקודה) אזי ייתקבל ווקטור חדש V' המקיים: $V' = AV$

ב. הוכח כי טרנספורמציה אפינית הנה טרנספורמציה שומרת מקבילות, היינו, שני ישרים מקבילים במישור L_1 ו- L_2 יהיו מקבילים גם לאחר הפעלת טרנספורמציה אפינית על כל נקודה ב L_1 וב- L_2 . (רמז: נסה להגדיר מקבילות של ישרים בעזרת ווקטורים).

ג. נתונים שני ישרים מקבילים במישור L_1 ו- L_2 . הישר L_1 ניתן על-ידי המשוואה הפרמטרית: $L_1(t) = P + tV$. כאשר t הוא פרמטר חפשי. כמו-כן נתון כי הישר L_2 עובר דרך נקודה נתונה Q . בנוסף לכך, נתונים שני ישרים מקבילים אחרים L'_1 ו- L'_2 , כאשר L'_1 ניתן על-ידי המשוואה: $L'_1(t) = P' + tV'$ ו- L'_2 עובר דרך הנקודה Q' . ישנן אינסוף טרנספורמציות אפיניות המעבירות את הישר L_1 לישר L'_1 ואת הנקודה Q לנקודה Q' . מצא לפחות טרנספורמציה אחת כזו. (בנוסף מיוחד למי שמסוגל למצוא יותר מטרנספורמציה אחת).

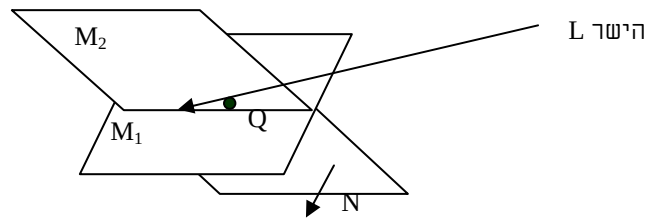


2. נתון מישור M_1 המשוכן בתלת-מימד המיוצג על-ידי המשוואה: $ax + by + cz + d = 0$ (המקדמים a, b, c, d נתונים).

א. מצא הנורמל למישור M_1 ?

ב. נתונה נקודה Q הנמצאת על M_1 . כמו-כן, נתון מישור M_2 , בעל נורמל N ושמיכל את הנקודה Q . מצא משוואה סתומה המייצגת את המישור M_2 .

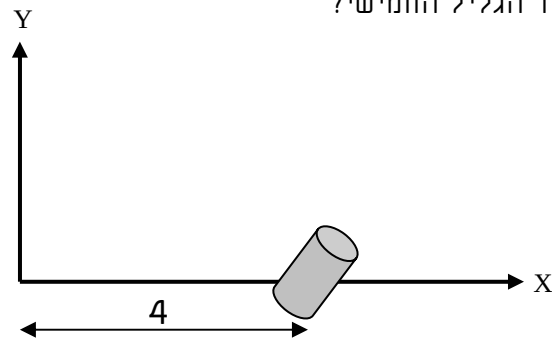
ג. הנח כי המישורים M_1 ו- M_2 (לע"ל) נפגשים ביניהם על הישר L . תן משוואה פרמטרית (לא סתומה) המייצגת את הישר L .



3. נתון הקוד הבא ב OpenGL. הפונקציה $\text{draw_cylinder}()$ מציירת גליל עומד בראשית הצירים.

א. בהרצת התכנית עבור ארבעת הגלילים הראשונים נתקבל הצירוף הבא. מצא איזה שורת קוד אחראית לכל אחד מארבעת הגלילים.

ב. היכן יצויר הגליל החמישי?



תוכנית: $\text{glRotatef}(x, a1, a2, a3);$ מהווה סיבוב ב- x מעלות נגד כוון השעון סביב ציר $(a1, a2, a3)$.
 $\text{glTranslate}(a1, a2, a3)$ מהווה הזזה בוקטור $(a1, a2, a3)$.

4. מעוניינים לצייר שמינית של מעגל ברדיוס R סביב הראשית בזווית θ יישם אלגוריתם mid-point עבור קטע זה של המעגל:

א. מהי המשוואה הסתומה $d(x, y) = 0$ של המעגל הנ"ל.

```
glMatrixMode(GL_MODELVIEW);

glLoadIdentity();
glTranslatef(4.0f, 0.0f, 0.0f);
glRotatef(-45.0f, 0.0f, 0.0f, 1.0f);
glTranslatef(4.0f, 0.0f, 0.0f);
glPushMatrix();
glTranslatef(0.0f, -2.0f, 0.0f);
draw_cylinder(); // draws cylinder #1

glLoadIdentity();
glRotatef(-45.0f, 0.0f, 0.0f, 1.0f);
glTranslatef(4.0f, 0.0f, 0.0f);
draw_cylinder(); // draws cylinder #2

glPopMatrix();
glPushMatrix();
glRotatef(45.0f, 0.0f, 0.0f, 1.0f);
draw_cylinder(); // draws cylinder #3

glLoadIdentity();
glTranslatef(4.0f, 0.0f, 0.0f);
glRotatef(-45.0f, 0.0f, 0.0f, 1.0f);
draw_cylinder(); // draws cylinder #4

glPopMatrix();
glTranslatef(0.0f, 2.0f, 0.0f);
draw_cylinder(); // draws cylinder #5
```

ב. מהן הקואורדינטות של הפיקסל הראשון שיש לצבוע ומה ערכו של $d(x,y)$ בפיקסל זה?

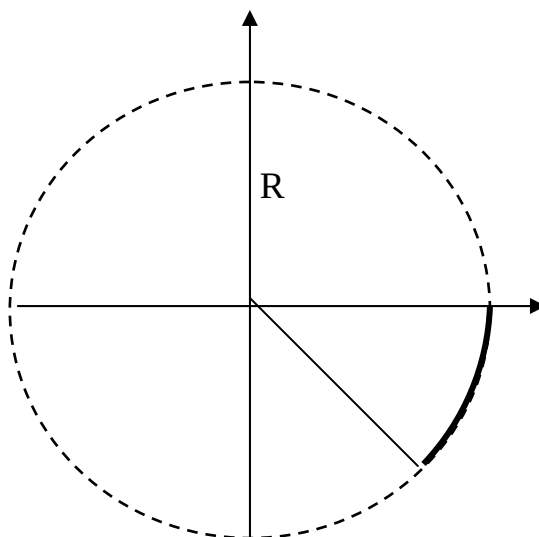
ג. בין אלו אלטרנטיבות יש לבחור בבואנו לצבוע את הפיקסל הבא?

ד. כיצד נדע באיזו אלטרנטיבה לבחור?

ה. כיצד נייעל את הבחירה בסעיף ד' על-ידי חישוב אינקרמנטלי, פרט לכל אחת מן האלטרנטיבות.

ו. כתוב אלגוריתם mid-point המיישם את כל תשובותיך לעי"ל.

ז. במידה והאינקרמנט (הערך שיש להוסיף בכל חישוב של $d(x,y)$) איננו קבוע, הצע דרך לייעל את חישוב האינקרמנט (רמז: הפעל שוב את הרעיון האינקרמנטלי).



בהצלחה

Solution

Question 1:

1. Any vector can be represented as a subtraction of two points: $V = P - Q$
However: $V' = P' - Q' = (AP + T - AQ - T) = A(P - Q) = AV$ Q.E.D
2. Let's take two points on L_1 : P and Q , and define $V = P - Q$
The vector V is parallel to L_1 . Since L_2 is parallel to L_1 , V is also parallel to L_2 .
Following item a. above we have that $V' = AV$ is parallel to L'_1 and L'_2 , therefore L'_1 and L'_2 are parallel. Q.E.D.
3. Any line in 2D has 2 degrees of freedom (for example, its orientation, and its distance from the origin). Therefore, the mapping L_1 onto L'_1 defines 2 constraints. The mapping Q onto Q' defines additional 2 constraints. Therefore, we have a total of 4 constraints. However, an affine transformation has 6 degrees of freedom, therefore we have 6 unknowns with 4 equations, which yield infinite solutions. In order to find a single solution we can add arbitrary constraints: for example, P is mapped onto P' which gives another 2 constraints. If the affine transformation is represented by a 2×2 matrix M and a 2×1 vector T , the equations are:

$$MV = V' ; \quad MP + T = P' ; \quad \text{and} \quad MQ + T = Q' \quad \text{where} \quad M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad T = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Opening the matrix equation and collecting all the unknowns in a vector column we get:

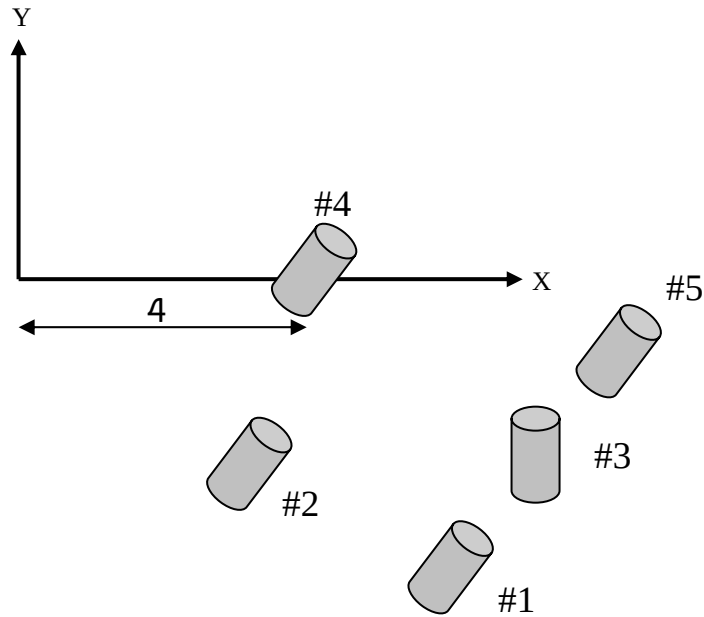
$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_x & V_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_x & V_y & 0 & 0 \\ P_x & P_y & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P_x & P_y & 0 & 1 \\ Q_x & Q_y & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & Q_x & Q_y & 0 & 1 \end{bmatrix}}_H \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}}_a = \underbrace{\begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \\ P'_x \\ P'_y \\ Q'_x \\ Q'_y \end{pmatrix}}_b$$

Solving for the unknown vector a : $a = H^{-1}b$ Q.E.D.

More transformations can be found by replacing the equation $MP + T = P'$ by $MP + T = P' + \alpha V'$ for any arbitrary α .

Question 2:

1. Define $S = (a, b, c)^T$, the normal to M_1 is: $N_1 = S/|S|$
2. Define $V = (x, y, z)^T$, the plane equation is: $(V - Q) \bullet N = 0$
3. L is perpendicular to N_1 and N_2 , and therefore is parallel to U : $U = N_1 \times N_2$, The parametric equation of L is: $L(t) = Q + tU$

Question 3:Question 4:

1. $d(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$
2. The first pixel is located at $(R, 0)$. The value of $d(x, y)$ is zero at this location.
3. We have to decide whether we paint the South pixel or the SouthWest pixel.
4. We check the value of $d_{\text{start}} = d(x-0.5, y-1) = d(R-0.5, 0-1) = 5/4 - R$. If $d_{\text{start}} > 0$ we choose to paint the South West pixel. Otherwise we paint the South pixel.
5. If we moved South, we have to check next $d(x-0.5, y-2) = d(x-0.5, y-1) + [d(x-0.5, y-2) - d(x-0.5, y-1)] = d_{\text{old}} + 3 - 2y$
 If we moved SouthWest, we have to check next $d(x-1.5, y-2) = d(x-0.5, y-1) + [d(x-1.5, y-2) - d(x-0.5, y-1)] = d_{\text{old}} + 5 - 2(x+y)$
6. Yes. We start from $d_{\text{start}} = 1 - R$ and continue as described.
- 7.