

מבחן סופי- גרפיקה ממוחשבת

מרצה: ד"ר יעקב הל-אור

זמן בחינה: 3 שעות

ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

- לכל שאלה ניקוד זהה, אך חלוקת הניקוד לסעיפים השונים לא בהכרח זהה.
- הבחינה עם חומר סגור. ניתן להביא דף פוליו אחד עם חומר עזר.
- בכל השאלות אין צורך לפתוח ביטויים. תשובות עד כדי הכפלה, הפיכת מטריצה, פתיחת סוגריים וכד' יתקבלו. בכל התשובות יש לספק ביטויים מדויקים. הסברים כלליים לא יתקבלו.

שאלה 1א. נתונות שתי עקומות פרמטריות ב (x,y) :

$$S_1(u) = \begin{pmatrix} 2u^2 + 4u^3 \\ 3 + 2u + 2u^3 \end{pmatrix} \quad S_2(u) = \begin{pmatrix} 6 + 8u + 4u^3 \\ 7 + 4u + 5u^2 \end{pmatrix} \quad u \in [0..1]$$

מעוניינים לחבר את נקודת הסיום של העקומה $S_1(u)$ לנקודת ההתחלה של $S_2(u)$. מצא מהי הרציפות הפרמטרית C^n ומהי הרציפות הגיאומטרית G^n בנקודת החיבור של העקומות.

ב. נתונות 4 נקודות במרחב תלת-מימדי $P_1, P_2, P_3, P_4 : (x,y,z)$. מעוניינים לצייר עקומה פרמטרית $V(u)$ המקיימת את האילוצים הבאים (ראה ציור):

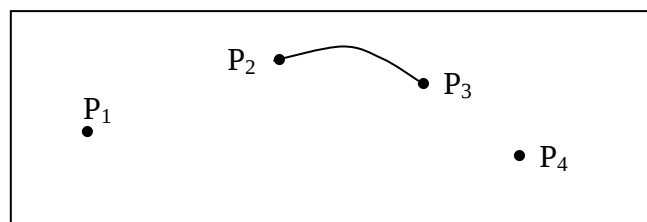
$$V(0) = P_2 \quad 1.$$

$$V(1) = P_3 \quad 2.$$

$$V'(0) = (P_2 - P_1)/2 \quad 3.$$

$$V'(1) = (P_4 - P_3)/2 \quad 4.$$

כאשר $V'(u)$ מציין את הנגזרת הפרמטרית (משיק) של $V(u)$.



נתון כי העקומה $V(u)$ ניתנת לתאור כסכום לינארי של ארבע פונקציות ערבול באופן הבא:

$$V(u) = P_1 b_1(u) + P_2 b_2(u) + P_3 b_3(u) + P_4 b_4(u)$$

ללא חישוב מפורש של פונקציות הערבול, מצא את ערכי פונקציות הערבול וערכי נגזרותיהן בנקודות $u=0,1$. כלומר מצא את ערכי $b_i(0), b_i(1), b'_i(0), b'_i(1)$ עבור $i=1..4$.

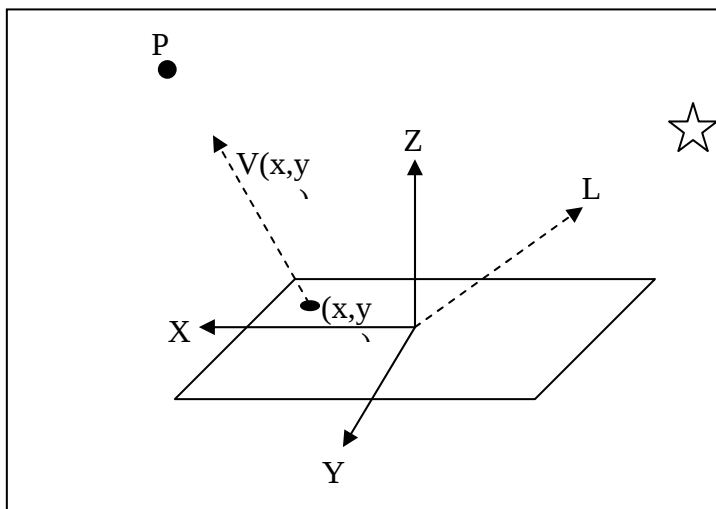
ג. על-פי תשובתך בסעיף הקודם צייר איכותית את פונקציות הערבול $b_1(u) .. b_4(u)$.

שאלה 2:

מאירים את מישור (x,y) בתאורה נקודתית הנמצאת במרחק אינסופי בכוון L (ווקטור יחידה).

הנורמל למישור (x,y) הוא הווקטור $(0 \ 0 \ 1)$.
 מצלמים את המישור מנקודה $P=(P_x, P_y, P_z)$ (שים לב, P איננה באינסוף).
 למישור המצולם מקדם החזרה דיפוזיבי K_d ומקדם החזרה ספקולרי K_s שאינם אפס.

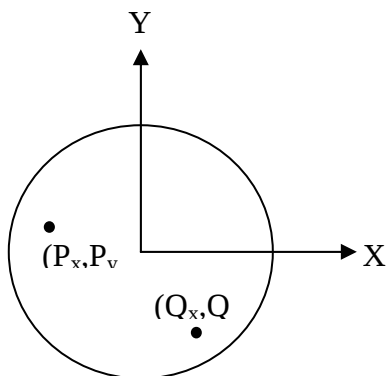
- א. עבור נקודה (x,y) הנמצאת על המישור, מהו כוון הצילום V ?
 ב. מהו הכוון R בו רכיב ההחזרה הספקולרי הוא הגדול ביותר? האם R זהה לכל נקודה (x,y) במישור? נמקד!
 ג. איזו נקודה על המישור תיראה הבהירה ביותר בצילום? מצא את (x,y) של נקודה זו. נמקד!



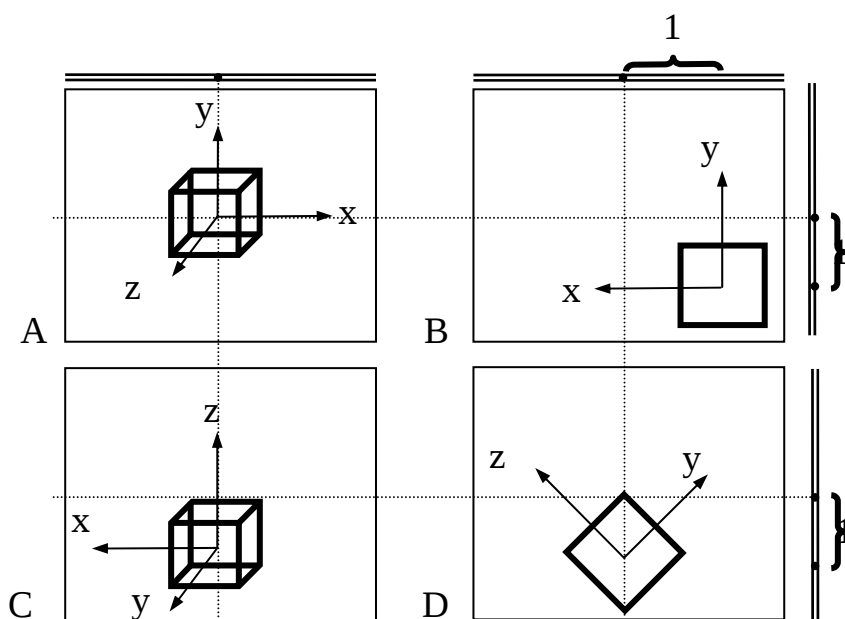
שאלה 3:

צופים מלמעלה (מכוון Z) על כדור תלת-מימדי שרדיוסו 1 בהטלה אורתוגרפית (ראה ציור).

- א. נקודה P הנמצאת על מעטפת הכדור מוטלת על מישור התמונה בנקודה (P_x, P_y) . מצא את מיקום הנקודה P בתלת מימד.
 ב. בדומה לסעיף א', נתונה נקודה נוספת Q הנמצאת על מעטפת הכדור שמוטלת לנקודה (Q_x, Q_y) . מצא ציר סיבוב וזווית סיבוב כך שטרנספורמציה הסיבוב תביא את הנקודה P לנקודה Q .
 ג. מצא את מטריצת הסיבוב של הסיבוב שמצאת בסעיף הקודם.



א. עבור כל תמונה, כתוב את הפרמטרים המתאימים עבור `glLookAt` שייתנו את התמונה הנתונה. במקרים שבהם לא ניתן לתת פרמטרים מדויקים, תן פרמטרים מקורבים שיהיו הגיוניים.

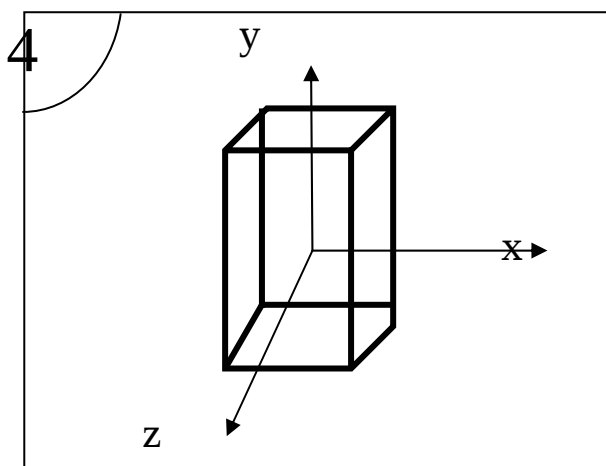
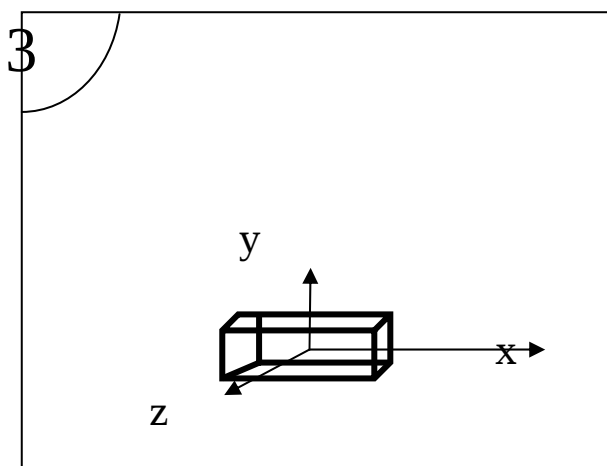
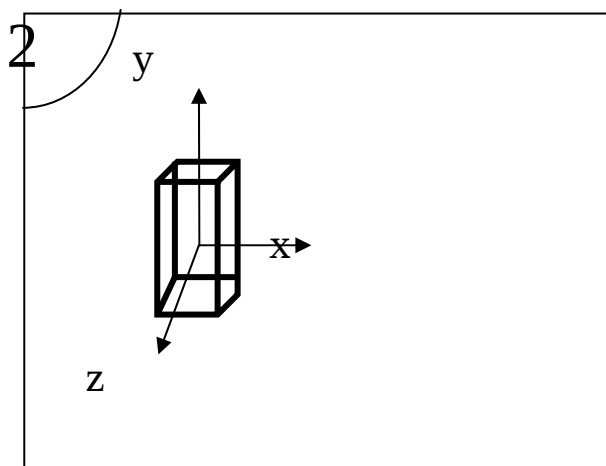
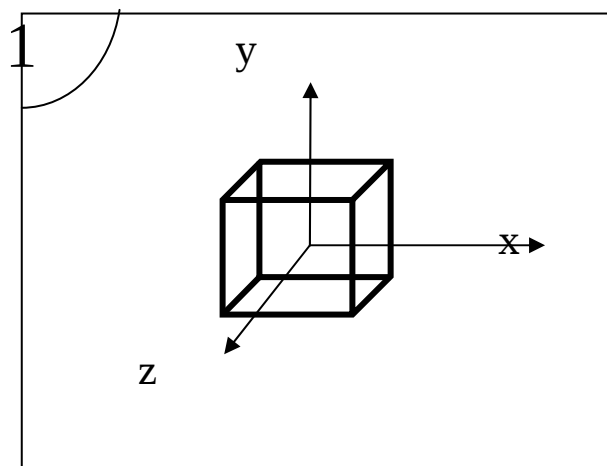


```
GLfloat e[] = {Ex, Ey, Ez};
GLfloat c[] = {Cx, Cy, Cz};
GLfloat u[] = {Ux, Uy, Uz};
// viewing transformation
gluLookAt (e[X], e[Y], e[Z], c[X], c[Y], c[Z], u[X], u[Y], u[Z]);
```

ב. הפונקציה `reshape` שכתובה להלן מציירת את ציור מס' 1. בצע את השינויים הנדרשים בפונקציה זו על-מנת לצייר את ציורים מס' 2, 3, 4-1.

```
void reshape (int w, int h)
{
    GLfloat fovy = 35, znear = 1.5f, zfar = 20.0f;

    glViewport (0, 0, (GLsizei) w, (GLsizei) h);
    glMatrixMode (GL_PROJECTION);
    glLoadIdentity ();
    gluPerspective(fovy, (GLdouble)w/(GLdouble)h, znear, zfar);
    glMatrixMode (GL_MODELVIEW);
}
```



בהצלחה

Question 1:a. (11 pt.)

$$S_1(u) = \begin{pmatrix} 2u^2 + 4u^3 \\ 3 + 2u + 2u^3 \end{pmatrix} \text{ and therefore } S_1'(u) = \begin{pmatrix} 4u + 12u^2 \\ 2 + 6u^2 \end{pmatrix} \text{ and } S_1^{(2)}(u) = \begin{pmatrix} 4 + 24u \\ 12u \end{pmatrix}$$

$$S_2(u) = \begin{pmatrix} 6 + 8u + 4u^3 \\ 7 + 4u + 5u^2 \end{pmatrix} \text{ and therefore } S_2'(u) = \begin{pmatrix} 8 + 12u^2 \\ 4 + 10u \end{pmatrix} \text{ and } S_2^{(2)}(u) = \begin{pmatrix} 24u \\ 10 \end{pmatrix}$$

From the above equations we have:

$$S_1(1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} ; S_1'(1) = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} ; S_1^{(2)}(1) = \begin{pmatrix} 28 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$S_2(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} ; S_2'(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} ; S_2^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

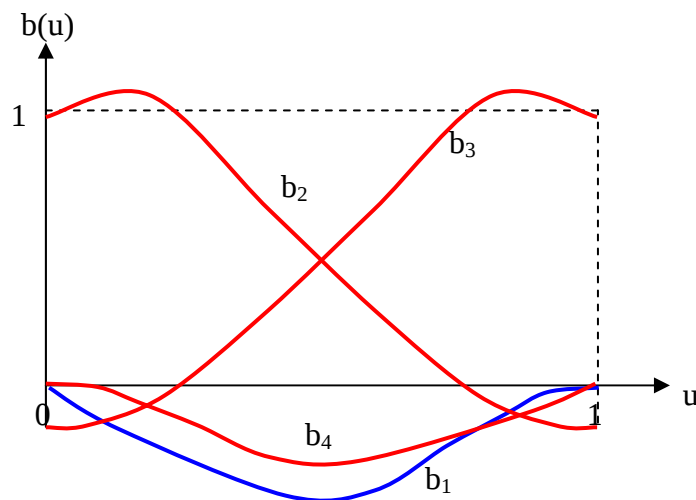
Since $S_1(1) = S_2(0)$ but $S_1'(1) \neq S_2'(0)$, the parametric continuity is C^0 .

Since $S_1(1) = S_2(0)$ and $S_1'(1) = 2S_2'(0)$ but $S_1^{(2)}(1) \neq S_2^{(2)}(0)$, the geometric continuity is G^1 .

b. (11 pt.)

Since $V(u) = P_1 b_1(u) + P_2 b_2(u) + P_3 b_3(u) + P_4 b_4(u)$ and knowing the constraints we have:

	b_1	b_2	b_3	b_4
$b(0)$	0	1	0	0
$b(1)$	0	0	1	0
$b'(0)$	-0.5	0.5	0	0
$b'(1)$	0	0	-0.5	0.5

b. (11 pt.)

Question 2:a. (11 pt.)

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

b. (11 pt.)

The vector R is a reflection of L about Z :
$$R = \begin{pmatrix} -L_x \\ -L_y \\ L_z \end{pmatrix}$$

Since the light source is at infinity, the vector L is constant for each point on the plane, and thus, R is constant as well.

c. (11 pt.)

The light direction L and the normal Z are constant for each point on the plane. Since the diffuse component is proportional to $(L \bullet Z)$, this component is constant for the entire plane. The specular component is proportional to $(V \bullet R)$. Since V is not constant over the plane, the maximum intensity will be given from a point whose V is parallel to R :

$$\text{i.e. } V(x, y) = \alpha R \Rightarrow \begin{pmatrix} P_x - x \\ P_y - y \\ P_z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -L_x \\ -L_y \\ L_z \end{pmatrix} \quad \text{for some unknown } \alpha$$

This equation gives:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x + \alpha L_x \\ P_y + \alpha L_y \end{pmatrix} \quad \text{where} \quad \alpha = P_z / L_z$$

Question 3:a. (11 pt.)

Since the projection is orthographic, the projection coordinates P_x and P_y are identical to the x, y , world coordinates. We still have to find P_z . The point P is located on the sphere with radius 1. Therefore,

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = 1 \Rightarrow P_z = \sqrt{1 - P_x^2 - P_y^2}$$

b. (11 pt.)

Similar to a. we have $Q_z = \sqrt{1 - Q_x^2 - Q_y^2}$

A rotation about an axis $R = \frac{P \times Q}{|P \times Q|}$ with angle $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{P \bullet Q}{|P||Q|} \right)$, brings P onto Q .

c. (11 pt.)

We build an orthonormal coordinate system (u,v,w), around R from the above section in the following manner:

$$w=R \quad ; \quad s=R \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad v=s/|s| \quad ; \quad v \times w = u$$

The rotation matrix is then:

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}^T$$

Question 4:

a. (18 pt.)

A) $E \approx (3, 2, 7)$ // Z is greater than X, and Y is a little higher-than the XZ plane

$C \approx (0, 0, 0)$ // looking at the origin

$U = (0, 1, 0)$ // Y is up

B) $E \approx (1, 1, -3)$ // Z is negative, and X, Y: small positive

$C \approx (1, 1, 0)$ // looking at positive-values of X, Y : (1, 1) according to the scale...

$U = (0, 1, 0)$ // Y is up

C) $E \approx (-1, 3, 1)$ // X is negative, Y: positive & greater than X. Z: a small positive-value, > 0.5

$C \approx (0, 0, 0.5)$ // looking at positive-values of Z, "0.5" because it's the edge of the cube.

$U = (0, 0, 1)$ // Z is up

D) $E \approx (5, \sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})$ // X is positive, Y, Z: Equal, and positive.

$C \approx (0, \sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})$ // looking at positive, Equal-values of Y,Z : $\sqrt{0.5}$, since it's the corner of the cube.

$U = (0, 1, 1)$ // "up" is a vector on YZ plane, and equal-values of Y & Z.

b. (15 pt.)

2) `glViewport(0, 0, w/2, h);`

3) `glViewport(0, 0, w, h/2);`

4) `gluPerspective(fovy, (GLdouble)w / (GLdouble)(h/2), znear, zfar);`