מבחן סופי גרפיקה - מועד א'

תאריך: 27.06.08
מרצה: פרופ' יעקב הל-אור
זמן בחינה: 3 שעות

- יש לענות על **שלוש מתוך ארבע** שאלות
- הבחינה עם חומר סגור.
- בכל השאלות אין צורך לפתוח ביטויים. תשובות עד כדי הכפלה, הפיכת מטריצה, פתיחת סוגריים, וכו' יתקבלו. **בכל התשובות יש לספק ביטויים מדויקים ומנומקים**. **הסברים כלליים לא יתקבלו**.
- לכל השאלות נקוד זהה, אך חלוקת הנקודות בסעיפים השונים בשאלה איננה בהכרח אחידה.

שאלה מס 1

כדור בעל רדיוס 80 יח' מצולם תחת הטלה אורתוגרפית. מישור ההטלה עבר דגימה לפיקסלים, כך שמיקום דו מימדי במישור התמונה נתון ביחידות של פיקסלים.

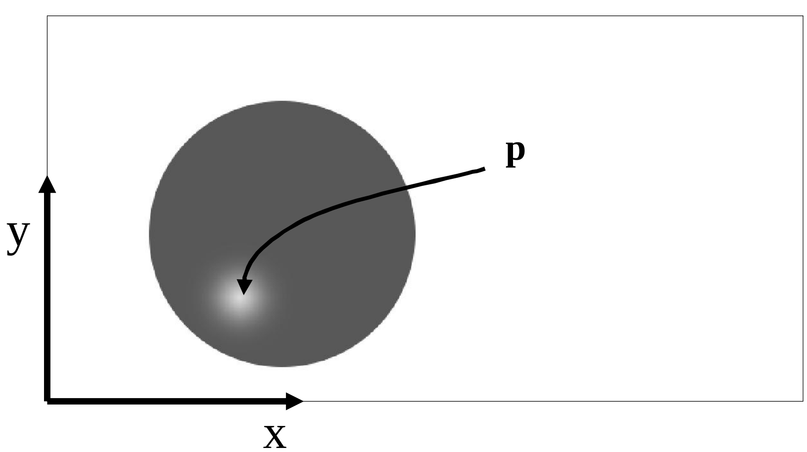
נתון כי מיקומו של מרכז הכדור במישור התמונה הוא $\mathbf{q}=(q_x,q_y)$, ורדיוסו במישור התמונה הוא 20.

א. מצא את מיקומה התלת מימדי (בקואורדינאטות עולם) של נקודה על מעטפת הכדור שמיקומה במישור התמונה נמצא בקואורדינאטות (x_0,y_0) . הגדירו את מערכת הקואורדינאטות של העולם כרצונכם.

ב. למעטפת הכדור רכיב החזרה **ספקולרי** שאיננו אפס. מודדים את מיקומה של נקודת highlight (נקודה בהירה ביותר כתוצאה מהחזר ספקולרי) בקואורדינאטות $\mathbf{p}=(p_x,p_y)$. מצא את כוונו של מקור האור בהנחה שמיקום המצלמה ומיקום מקור האור מרוחקים מאד מהכדור.

ג. האם ישתנה מיקומה של **p** במידה ונצמצם את מרחקו של מקור האור מהכדור (אבל לא נשנה את כוונו ביחס למרכז הכדור). אם כן, תאר איכותית מהו השינוי.

ד. האם ישתנה מיקומה של **p** במידה ונצמצם את מרחקה של המצלמה מהכדור (אבל לא נשנה את כוון המצלמה ביחס למרכז הכדור). אם כן, תאר איכותית מהו השינוי.



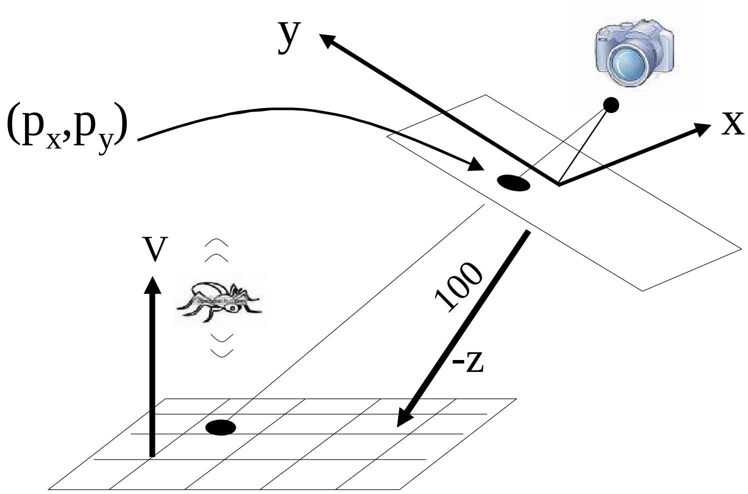
<u>שאלה מס 2</u>

מצלמים במצלמה פרספקטיבית מישור מרוצף. נתון כי אורך המוקד של המצלמה הוא 2 , והציר האופטי חוצה את המישור במרחק 100 יחידות **ממישור ההטלה**. כ"כ נתון ווקטור V המאונך למישור המרוצף. הווקטור V נתון במערכת הקואורדינאטות של הצופה.

א. מצא ייצוג סתום למישור המרוצף במערכת הקואורדינאטות של הצופה.

ב. שלולית מים נמצאת על המישור המרוצף במיקום לא ידוע. ההטלה של מרכז השלולית נמדדת במישור התמונה במיקום $\mathbf{p}=(p_x,p_y)$ ביחס למערכת הקואורדינאטות של התמונה. מצא את המיקום **התלת מימדי** של מרכז השלולית ביחס למערכת הקואורדינאטות של הצופה.

ג. במרכז השלולית עומד פשפש קטן שקופץ במקום. בזמן קפיצותיו גובהו של הפשפש ביחס למישור הוא $h(t)=5*\sin(2\pi t)$ כאשר t מציין זמן. מצא את מיקומו של הפשפש **במישור התמונה** כפונקציה של הזמן.



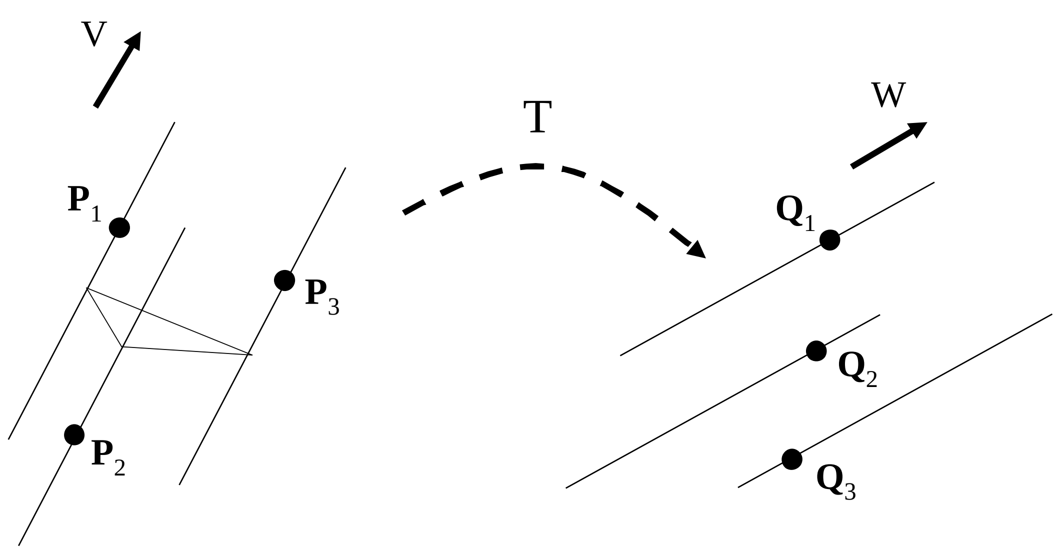
<u>שאלה מס 3</u>

שלושה ישרים מקבילים זה לזה ממוקמים במרחב תלת-מימדי.
הישרים מקבילים לווקטור נתון **V** , כאשר הישר הראשון עובר דרך נקודה P_1 , הישר השני דרך נקודה P_2 , והישר השלישי דרך P_3 .

א. מצא/י 3 נקודות על הישרים , נקודה אחת לכל ישר, כך שהווקטור **V** יהיה מאונך למישור העובר דרך 3 הנקודות שמצאת.

ב. מצא/י תאור פרמטרי לשטח המישורי התחום ע"י המשולש העובר דרך שלושת הנקודות שמצאת.

ד. נתונים עוד שלשה של ישרים המקבילים לווקטור נתון **W** , ושעוברים דרך נקודות Q_1 , Q_2 , ו- Q_3 בהתאמה. מצא טרנספורמציה T שתעביר את שלושת הישרים מהסעיפים הקודמים, לשלושת הישרים החדשים בהתאמה (ז"א ישר ראשון עובר לישר ראשון וכו'). האם הטרנספורמציה יחידה? נמק/י.



<u>שאלה מס 4</u>

עקומה סגורה **O** מוגדרת במישור דו מימדי בהצגה פרמטרית :

$$\mathbf{O}(t)= (X(t)\ ,\ Y(t)) \quad t\in [0..1]$$

מעוניינים לייצר גוף תלת מימדי בשיטת sweep volume הנוצר מסיבוב בתלת-מימד של **O** סביב ציר המקביל לציר y והעובר בנקודה x=10

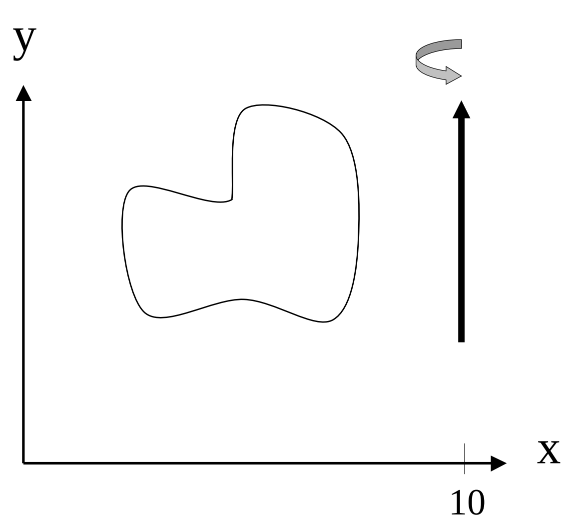
א. תאר אלגוריתם שבונה ייצוג סבכה (mesh representation) לגוף התלת-מימדי.
באלגוריתם ניתן להשתמש בפקודות הבאות:

V = **vertex**(X,Y,Z) יצירת קדקוד ב mesh בעל קואורדינאטות (X,Y,Z)

F = **face**(v1,v2,v3,v4,…) יצירת פאה בין קדקדים … v1 v2 v3 v4 בעיקוב ימני.

כתוב אלגוריתם מדויק ומפורט. דאג שכל הפאות יפנו "החוצה" ע"י סידור נכון של הקדקודים בזמן יצירת פאה. ניתן להשתמש במערכים.

ב. שכלל את האלגוריתם כך שה mesh שיתקבל יהיה פלנרי (planar mesh)



<u>ב ה צ ל ח ה</u>

Solution

Question1

a. We define the location of a **word** coordinate system at the center of the sphere, and where the camera is located at the Z axis and the (X,Y) axes are parallel to the image (x,y) plane. Using this world coordinate system, the translation from image coordinates (x,y) to world coordinates (X,Y) is applied as follows:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x - q_x \\ y - q_y \end{pmatrix}$$

The world Z coordinate can be deduced from (X,Y) and the sphere equation:

$$Z = \sqrt{R^2 - X^2 - Y^2} \quad where \quad R = 80$$

b. Since we deal with a sphere, the normal equals to the radius vector, thus, the normal **N** at point **p** is:

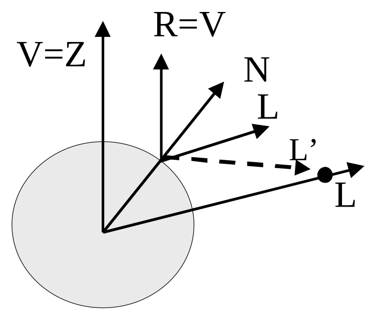
$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} p_x - q_x \\ p_y - q_y \end{pmatrix} \quad and \quad P_z = \sqrt{R^2 - P_x^2 - P_z^2} \quad and \quad N = \frac{P}{\|P\|}$$

The specular component is proportional to (R·V) , thus, the maximum (highlight) is located at a point where R=V. Since N is known, we can calculate L:

$$L = (R \cdot N)N - (R - (R \cdot N)N) = (V \cdot N)N - (V - (V \cdot N)N) = 2(V \cdot N)N - V$$
$$where \;\; V = (0 \quad 0 \quad 1)^T$$

c. When the light becomes closer, the angle between N and L becomes larger (N' in the figure) , thus the highlight position will drift towards the circumference.

d. When the camera becomes closer, the angle V will remain the same because we deal with parallel projection, thus, the highlight position will remain the same.



Question2

a. The optical axis crosses the plane at Q=(0,0,-102). Thus, we have a point Q and a vector V, for which the plane is defined as:

$$(S-Q)\cdot V=0 \quad where \quad S=(X \quad Y \quad Z)^T$$

b. From the projection point p=(p_x,p_y) we can construct two equations :

$$p_x=\frac{-2P_x}{P_z} \Rightarrow p_xP_z+2P_x=0$$

$$p_y=\frac{-2P_y}{P_z} \Rightarrow p_yP_z+2P_y=0$$

where we have 3 unknowns P=(P_x,P_y,P_z)

We can add an additional equation using the plane equation:

$$(P-Q)\cdot V=0 \Rightarrow P\cdot V=Q\cdot V$$

Collecting the equations we have:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & p_x \\ 0 & 2 & p_y \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q\cdot V \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M} \qquad \mathbf{P} \quad = \quad \mathbf{b}$$

and the solution is: **P**= M^{-1}**b**

c. The bug's location is $S(t)=P+h(t)V$ where P was calculated before.

Hence its location in image plane is:

$$s(t)=\begin{pmatrix} -2\,S(t)_x/S(t)_Z \\ -2\,S(t)_y/S(t)_Z \end{pmatrix}$$

Question 3

a. Denote the 3 points R_1, R_2, and R_3 . We set R_1=P_1
We now find a plane M that passes through P_1 whose normal is V. The implicit representation of M is:

$$(S-P_1)\cdot V=0 \quad where \;\; S=\begin{pmatrix}X & Y & Z\end{pmatrix}^T$$

We now represent the second line using a parametric representation:

$$L_2(t)=P_2+tV$$

We find a parameter t_0 that describes a point R_2 on L_2 which is also on M (we assume |V|=1) :

$$(L_2(t_0)-P_1)\cdot V=(P_2+t_0V-P_1)\cdot V=0$$
$$\Rightarrow t_0=(P_1-P_2)\cdot V \quad \Rightarrow R_2=L_2(t_0)=P_2+((P_1-P_2)\cdot V)V$$

Similarly, we find a parameter t_0 that defines point R_3 on L_3

$$R_3=P_3+((P_1-P_3)\cdot V)V$$

b. $$M(\alpha,\beta)=\beta(\alpha R_1+(1-\alpha)R_2)+(1-\beta)R_3 \;\; where \;\; \alpha,\beta\in[0..1]$$

c. We maps each P_k towards Q_k, k=1..3, using 3D affine transformation.
We choose another point on L_1, e.g. P_4=P_1+V
and map it towards Q_4=Q_1+W .
Therefore, for each point we have a transformation equation:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} P_k + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = Q_k \qquad k=1..4$$

Using a vector notation for the unknowns we compose for each point 3 equations:

$$\begin{pmatrix} P_k^x & P_k^y & P_k^z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_k^x & P_k^y & P_k^z & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_k^x & P_k^y & P_k^z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{X} = Q_k \quad for \;\; k = 1..4$$

Where X is a parameter vector describing the transformation T:

$$\vec{X}^T = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i & t_x & t_y & t_z \end{pmatrix}$$

Collecting such equations for the 4 points defined above, we have 12 equations for 12 unknowns and we can solve for the parameter vector X by inverting the composed matrix.

The transformation is NOT unique since we can append a translation along W which will be a legitimate transformation as well.

Comments: Denoting L_1, L_2, L_3 as the first 3 lines (direction V), L'_1, L'_2, L'_3 the second group of lines (direction W), and $T(L_1)$, $T(L_2)$, $T(L_3)$, the mapped lines:

- $T(L_1)$ is a line because affine transformation preserves lines.
- The direction of $T(L_1)$ is W, because Q_4-Q_1 is parallel to W.
- $T(L_1)= L'_1$ because both are parallel to W and both passes Q_1
- The direction of $T(L_2)$ and $T(L_3)$ is W because affine transformation preserves parallelism.
- $T(L_2)= L'_2$ because both are parallel to W and both passes Q_2
- $T(L_3)= L'_3$ because both are parallel to W and both passes Q_3

Question 4

a.

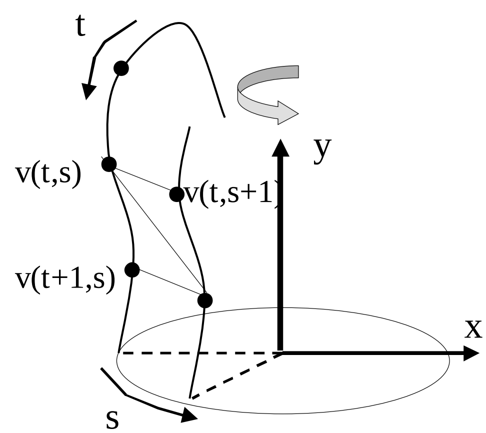
```
t=0;   s=0 ;   % free parameter initializations
Inc_t=1/100 ; inc_s=2*pi/100 ;
double V[100,100]=NULL;

for  t=1:100
       X1=Ox(t*inc_t) ;  % the x axis of the object at t
       Y1=Oy(t*inc_t) ; % the y axis of the object at t
       Z1=0 ;

        for s=1:100  {
               Vx=(X1-10)*cos(s) + Z1*sin(s) +10 ;
               Vy=Y1;
               Vz=-(X1-10)*sin(s) + Z1*cos(s) ;
               V[t,s]=vertex(Vx,Vy,Vz)
       }
}

k=1;
for  t=1:99
     for s=1:99
           F[k]=face(V[t,s],V[t+1,s],V[t+1,s+1],V[t,s+1]) ;
           k=k+1;
     }
}

% close the loop
s=100 ;
for t=1:100
           F[k]=face(V[t,s],V[t+1,s],V[t+1,1],V[t,1]) ;
           k=k+1;
}
```



The Rotation we apply:

$$\begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ z(t,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(s) & 0 & \sin(s) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(s) & 0 & \cos(s) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} O(t)_x \\ O(t)_y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b. Replace the command

```
F[k]=face(V[t,s],V[t+1,s],V[t+1,s+1],V[t,s+1]) ;
 by
F[k]=face(V[t,s],V[t+1,s],V[t+1,s+1]) ;
F[k+1]=face(V[t+1,s+1],V[t,s+1],V[t,s]) ;
k=k+2 ;
```